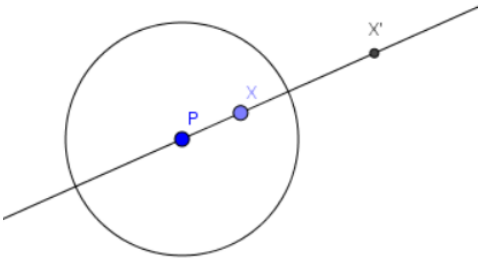
反演

趙庭偉

May 9, 2017

1 定義

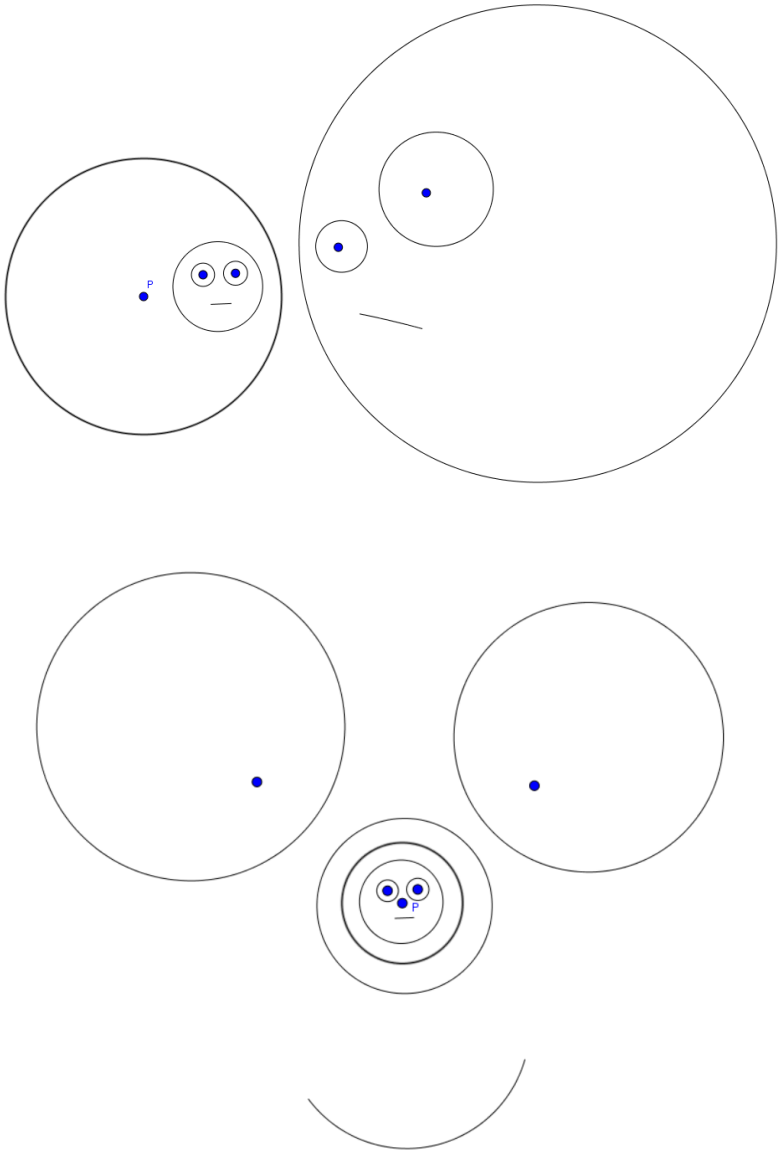
反演是一個在競賽中很常用到，但也是最不直觀的幾何變換。相較於其他我們常在高中幾何看到的變換 (旋轉、平移、伸縮、鏡射) 而言，反演變換跟他們最大的差異就是他不會讓反演後的圖形跟原本相似，也正因為這點，反演變換更能夠巧妙的幫助我們發現題目中所隱藏的性質，或是給出更簡潔的證明，所以首先讓我們來看看這個變換的定義吧！



定義 1 一個反演變換包含了一個反演中心 P 以及一個非 0 實數 k(稱為反演冪)，將平面上每一個非 P 的點 X 送到 X' 使得 PXX' 共線，且 $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PX'} = k$，並且把 P 送到無窮遠點，無窮遠點送到 P。

定義 2 取一個反演圓做的反演變換也就是以圓心 O 為反演中心、半徑長平方 r^2 為反演冪的反演變換。

附註 我們通常會假設反演中心送到無窮遠點，無窮遠點送到反演中心。



上面的定義乍看之下十分奇怪，但從定義2來看的話，反演某種程度上可以說是對於選定的反演圓做「鏡射」。從另外一種角度來看，反演可以想成是在反演中心上放上一顆與平面相切的球，並把這個點當成南極點，首先把平面上的圖像用對北極點球極投影的方式包回球上，然後再在北極點放上一個與球相切的平面，並對南極點做球極投影，這兩個平面之間的變換就是反演變換。

2 性質

為了讓我們更確切的了解反演怎麼用在高中幾何或是競賽幾何上，就讓我們來看看以下這些性質吧！

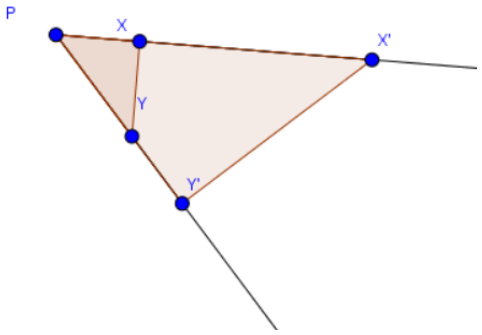
性質 1 對於同一個反演中心 P、不同反演冪 k, k' 所做的反演變換只差一個以 P 為中心、比例為 $\frac{k}{k'}$ 的縮放。

證明: 注意到定義中使用 k 與 k' 作為反演冪所得到的 X' 與 P 的距離比正好就是 $\frac{k}{k'}$，所以就得到這個性質了。 □

性質 2 若圖形 A 經過反演變換得到圖形 B，則圖形 B 經過同一個反演變換則會得到圖形 A。

證明: 注意到定義中若 X 送到 X'，則 X' 會送到 X，而圖形都是由一堆點構成的，所以對每個點用上述事實就可以得到兩個圖形會「互反」了。 □

性質 3 考慮反演中心 P 的反演，X, Y 為平面上兩點，且反演後為 X', Y'，則 $\triangle PXY \sim PY'X'$。

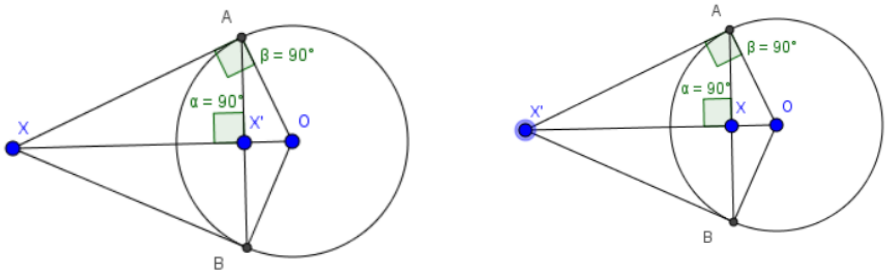


證明: 首先有 $\angle XPY = \angle Y'PX$，且

$$\overline{PX'} : \overline{PY'} = \frac{k}{\overline{PX}} : \frac{k}{\overline{PY}} = \overline{PY} : \overline{PX}$$

所以根據 SAS 相似性質，他們兩個就相似了。 □

性質 4 考慮一個以圓 Ω 為反演圓的反演變換，令 O 為 Ω 的圓心，X 反演後的像 X'。若 X 在 Ω 的外部，則 X' 會落在 X 對 Ω 的兩切點連線上；若 X 在 Ω 內部，過 X 做垂直 OX 直線交 Ω 於 A, B，過 A, B 分別做對 Ω 的切線，兩線交點即為 X'。



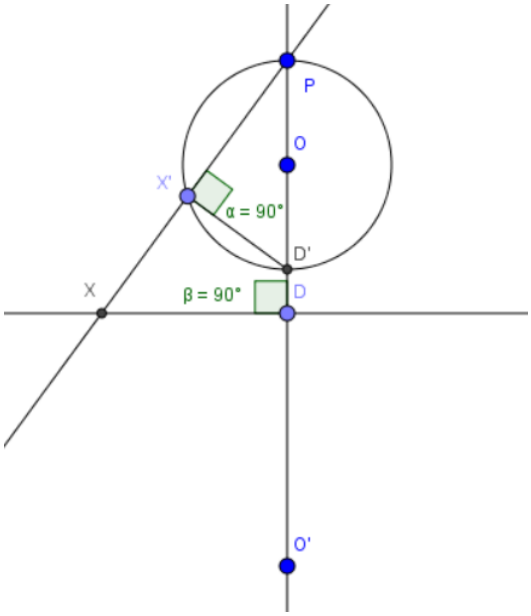
證明: 若 X 在 Ω 外部，令 A, B 為 X 對 Ω 的切點，因為 XAO 是直角三角形，由母子相似定理可知 AB 與 XO 交點滿足 $\overline{OX}\,\overline{OX'} = r^2$，其中 r 是 Ω 半徑長。

若 X 在 Ω 內部，則由性質2以及上述論證就能推論出來了。 □

性質 5 經過反演中心 P 的直線反演後為同一條直線。

證明: 對於這條直線上每一點 X，我們都會有反演後得到的 X' 落在這條直線上，而且 X' 會送到 X，並且有 P 跟無窮遠點互反，所以這條直線反演完還是這條直線。 □

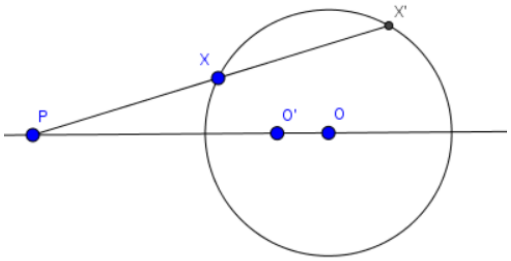
性質 6 不經過反演中心 P 的直線 Γ 反演後為一經過反演中心 P 的圓 Ω，經過反演中心 P 的圓 Ω 反演後為一條不經過反演中心 P 的直線 Γ，且 P 對 Γ 的對稱點與 Ω 的圓心互反。

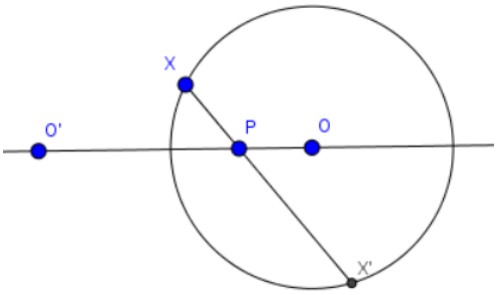


證明: 考慮一條不經過 P 的直線 Γ，令 P 到它的垂足為 D，令 D 反演到 D'，則直線上所有點為滿足 $\angle PDX = 90°$ 的點，所以根據性質3會有反演後的軌跡是滿足 $\angle PX'D' = 90°$ 的所有 X' 形成的軌跡，也就是 PD' 直徑圓。所以用性質2就能知道反之亦然，而圓心是 PD' 中點，由定義可知反演後是 P 對 D 的對稱點，也就是 P 對直線的對稱點。 □

性質 7 不經過反演中心 P 的圓 Ω_1 反演後為一不經過反演中心 P 的圓 Ω_2，且 Ω_1 的圓心與 P 對 Ω_2 的反演點互反。

證明: 首先，我們先回憶一下圓冪性質：給定一點 P 以及一個圓 Ω，做任意一條過 P 的弦 (或切線)，交圓於兩點 (切線的情形將兩點都當作切點)X, X'，則 $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PX'}$ 都是定值，且此定值為 $\overline{OP}^2 - r^2$，其中 O, r 分別是 Ω 的圓心及半徑長，我們稱這個值為 P 到 Ω 的冪。





回到原命題，若給定一個不過 P 的圓 Ω_1，我們若取反演中心為 P，反演冪為 P 到 Ω_1 的冪的反演變換，考慮圓上任何一點 X，連 PX 交 Ω_1 於另一點 X'(若 PXQ 是切線則是同一點)，我們會有 X 跟 X' 互反，. 也就是這個圓會「自反」(自己與自己互反)。

令 O 是 Ω_1 的圓心，P 對 Ω_1 的反演點為 O'，則 $\overline{OP}\,\overline{OO'} = r^2$，所以 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO'} = \overline{OP}^2 - r^2$，也就是 O 跟 O' 互反。

而當我們改變反演冪時，由性質1可知反演後的像只差一個伸縮，所以 Ω_2 是一個不過 P 的圓，而 Ω_1 的圓心與 P 對 Ω_2 的反演點互反。

□

性質 8 若反演中心為 P，反演冪為 k，且兩點 X, Y 反演至 X', Y'，則

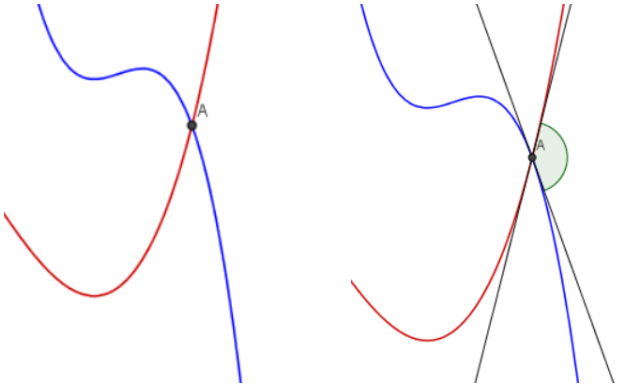
$$\overline{X'Y'} = \frac{|k|\overline{XY}}{\overline{PX}\,\overline{PY}}$$

證明: 由性質3可知 $\triangle PXY \sim \triangle PY'X'$，所以

$$\overline{X'Y'} = \overline{XY}\frac{\overline{PX'}}{\overline{PY}} = \frac{|k|\overline{XY}}{\overline{PX}\,\overline{PY}}$$

□

定義 3 若兩條平滑曲線交於 Q，則此兩條曲線在 Q 的交角定為兩條曲線在 Q 點的切線之間的交角。

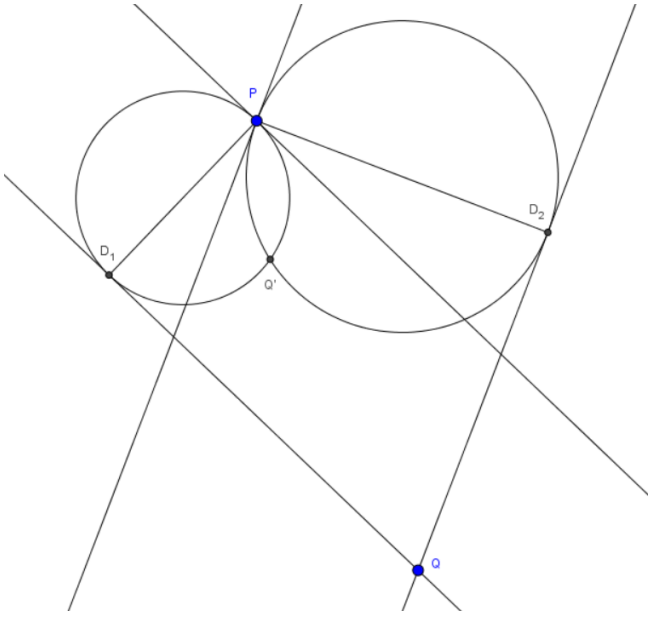


性質 9 反演保角。也就是兩條曲線在 Q 的交角 $=$ 兩條曲線反演後在 Q' 的交角，其中 Q, Q' 互反。

證明: 注意到若原本兩個物件相切，則反演之後也相切，所以我們只需要證明兩條直線反演後保角即可。

反演中心通過這兩條中至少一條直線的情況不難論證，這部分留給讀這自行思考，以下我們假設反演中心不通過這兩條直線。

設反演中心為 P，兩直線為 Γ_1, Γ_2，令兩直線交點為 Q，分別做 P 對 Γ_1, Γ_2 的垂足 D_1, D_2，考慮以 P 為中心，反演冪為 $\overline{PD_1}\,\overline{PD_2}$ 的反演變換，再對 $\angle D_1PD_2$ 的角平分線鏡射，則 D_1, D_2 在此變換下互相送到對方，兩直線 Γ_1, Γ_2 做此變換後分別是 PD_2, PD_1 的直徑圓，而 PD_1 直徑圓在 P 的切線平行 Γ_1，而 PD_2 直徑圓在 P 的切線平行 Γ_2，所以兩線夾角等於兩圓在 P 點夾角等於兩圓在 Q' 的夾角，其中 Q' 是 Q 的反演點。 □



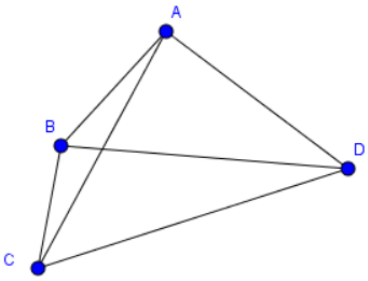
3 反演應用-定理

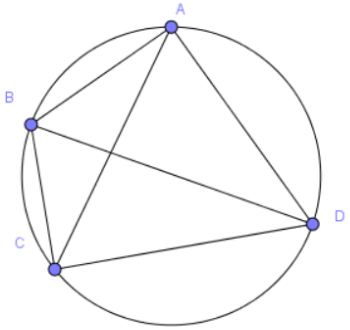
正如前面所說，反演可以用在各種證明上，所以就讓我們來看看幾個實際應用的例子吧！

定理 1 托勒密定理及托勒密不等式:
若 $ABCD$ 是一個四邊形，則

$$\overline{AB}\ \overline{CD} + \overline{AD}\ \overline{BC} \geq \overline{AC}\ \overline{BD}$$

等號成立若且唯若 $ABCD$ 是圓上依序四點。





證明: 考慮一個反演中心為 A，反演冪為 1 的反演變換，令 B, C, D 分別送到 B', C', D'，則

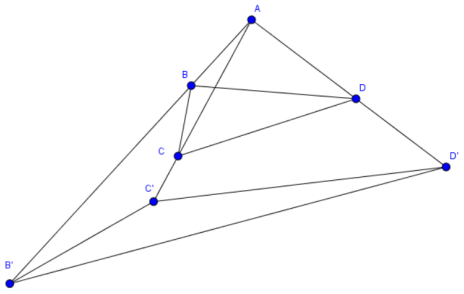
$$\overline{AB} = \frac{1}{\overline{AB'}}, \overline{CD} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{AC'}\ \overline{AD'}}$$
$$\overline{AC} = \frac{1}{\overline{AC'}}, \overline{BD} = \frac{\overline{B'D'}}{\overline{AB'}\ \overline{AD'}}$$
$$\overline{AD} = \frac{1}{\overline{AD'}}, \overline{BC} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}\ \overline{AC'}}$$

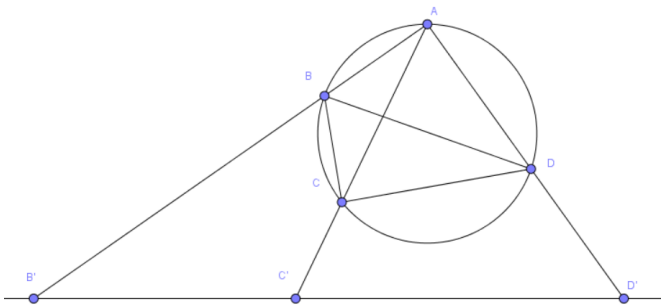
所以原式等價於

$$\frac{1}{\overline{AB'}}\frac{\overline{C'D'}}{\overline{AC'}\ \overline{AD'}} + \frac{1}{\overline{AD'}}\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}\ \overline{AC'}} \geq \frac{1}{\overline{AC'}}\frac{\overline{B'D'}}{\overline{AB'}\ \overline{AD'}}$$

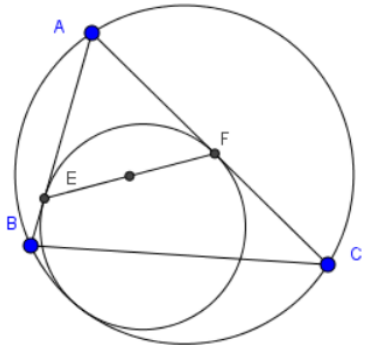
這其實就是 $\triangle B'C'D'$ 的三角不等式，等號成立當且僅當 $B'C'D'$ 是線上依序三點，也就是 $ABCD$ 是圓上依序四點。 □

附註 我在這個定理當中，我們巧妙的利用反演把原本看似不知道怎麼處理的長度關係，換成了我們熟知的三角不等式，但這結果也不太意外，因為我們可以注意到定理的等號成立條件是 $ABCD$ 四點共圓，所以對著其中一個點反演，等號成立條件就應該是剩下三點共線。

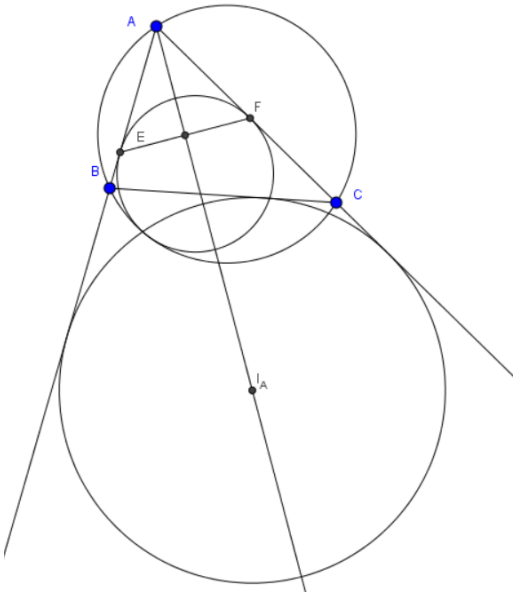




定理 2 曼海姆定理:
設 $\triangle ABC$ 的外接圓為 Ω，一圓與 $\overline{AB}, \overline{AC}, \Omega$ 相切 (此圓稱為 $\triangle ABC$ 的 A-偽內切圓)，設此圓與 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 分別切於 D, E，則 D, E 中點為 $\triangle ABC$ 的內心。



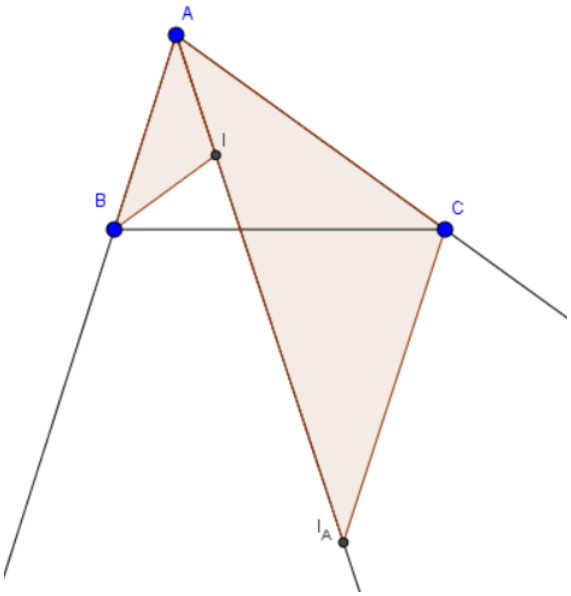
證明: 考慮一個以 A 為反演中心，$\overline{AB}$ $\overline{AC}$ 為反演冪的反演變換，再對 $\angle BAC$ 的角平分線做鏡射，這個變換會把 B, C 互相送到對方，直線 AB, AC 會互相送到對方，而過 A, B, C 的圓 Ω 會變成過 C, B 的直線，所以偽內切圓就會變成一個與直線 AB, AC, BC 相切的圓，而原本離反演中心越近的點會變得越遠，所以這個 A-偽內切圓就會變成 A-旁切圓，而由性質4及性質7可知，D, E 中點會變成 A-旁切圓圓心，也就是 $A-$ 旁心。



另一方面，我們可以透過簡單的角度計算得知 $\triangle AIB \sim \triangle AI_AC$，其中 I, I_A 分別是 $\triangle ABC$ 的內心及 A-旁心，也就是說 $\overline{AB}\,\overline{AC} = \overline{AI}\,\overline{AI_A}$，這也就代表著 I 經過上面那個變換會送到 I_A，所以就可以得出 I 就是 D, E 中點。 □

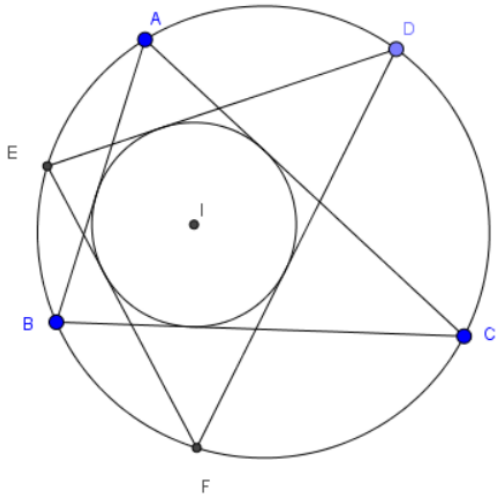
附註 在這定理當中，我們透過反演把兩條直線 AB, AC 以及一個圓 Ω 反演成三條直線，而我們對於與三條直線相切的圓的性質更為了解，所以我們就可以知道一些關於內偽切圓的性質了。

另外實際上若假設內偽切圓與 Ω 相切於 X 點，則 XE, XF 會分別交外接圓於 AB, AC 的弧中點，若證明出此事，就可以透過帕斯卡定理得到 EIF 共線，進而導出曼海姆定理，這是相對常見的證明方法。



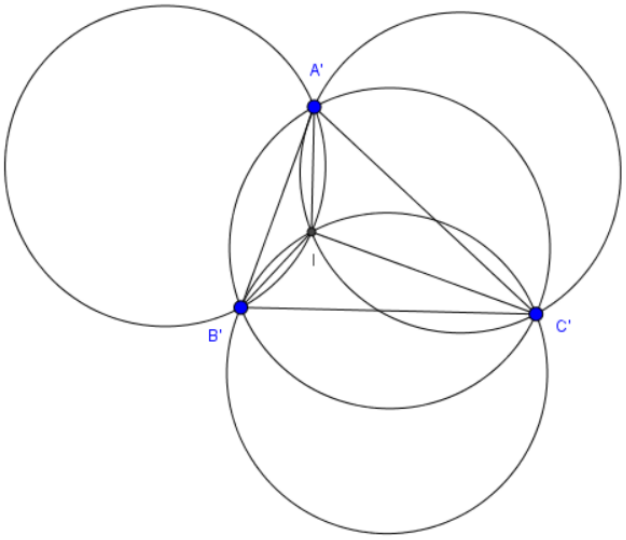
定理 3 龐色列閉合:

設 $\triangle ABC$ 的外接圓為 Ω_1，內切圓為 Ω_2，在 Ω_1 上任取一點 D，過 D 做 Ω_2 的兩條切線分別交 Ω_1 於異於 D 的點 E, F，則 $\overline{EF}$ 與 Ω_2 相切



證明: 首先我們先來想一下，如果有一個三角形 ABC，它的內心是 I，對 I 反演後 ABC 變成 $A'B'C'$，則 I 是 $A'B'C'$ 的什麼？

我們都熟知 I 是一個到三邊等距的點，而 AB 直線反演完是 $IA'B'$ 外接圓，所以反演後 $IA'B'$ 外接圓、$IB'C'$ 外接圓、$IC'A'$ 外接圓三個圓一樣大，而我們會發現此時 $\angle IA'B' = \angle IC'B', \angle IA'C' = \angle IA'B'$，所以 $\angle B'A'C' + \angle B'IC' = 180°$，同理有 $\angle A'B'C' + \angle A'IC' = 180°, \angle A'C'B' + \angle A'IB' = 180°$，而滿足這樣條件的點唯一，我們又知道 $A'B'C'$ 的垂心滿足這個條件，也就是 I 是 $A'B'C'$ 的垂心，同時我們也知道那三個外接圓也跟 $A'B'C'$ 的外接圓一樣大。



回到原題，令 Ω_2 的圓心為 I，考慮一個對 I 的反演，那由上述討論可知，Ω_2 提供的條件就是要畫跟外接圓等大的圓，也就是 $D'IE', E'IF'$ 的外接圓跟 Ω_1 反演後的圓等大，而類似上一段的討論可知，$D'E'F'I$ 是一組垂心組，也就是 $D'IF'$ 的外接圓也跟那些圓等大，也就是說 DF 跟 Ω_2 相切。 □

附註 在這定理當中，我們了解到對內心反演後會發生什麼時，而這也常常出現在競賽幾何題當中，甚至連 2015 IMO P3 都可以用這個事實解決。

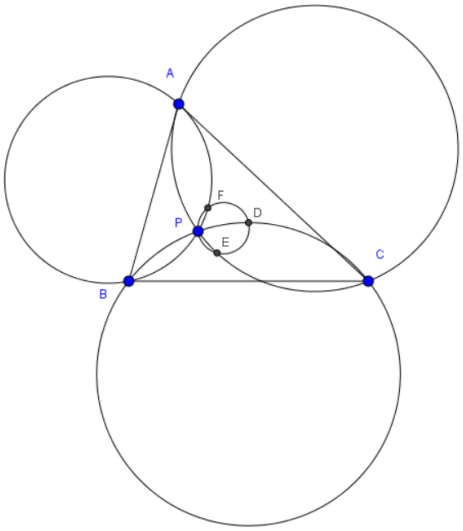
而龐色列閉合實際上可以推廣到 n 邊形若有內切圓與外接圓時，這命題也會成立！

4 反演應用-題目

在這一部分，我們來看看反演實際用在競賽解題的時候大概可以怎麼使用，然而有時候我們會將整張圖反演，把原命題整個改寫成反演命題，所以有時候為了簡潔，會讓新命題中的所有標號與原命題標號相同 (反演中心的標號不變)。

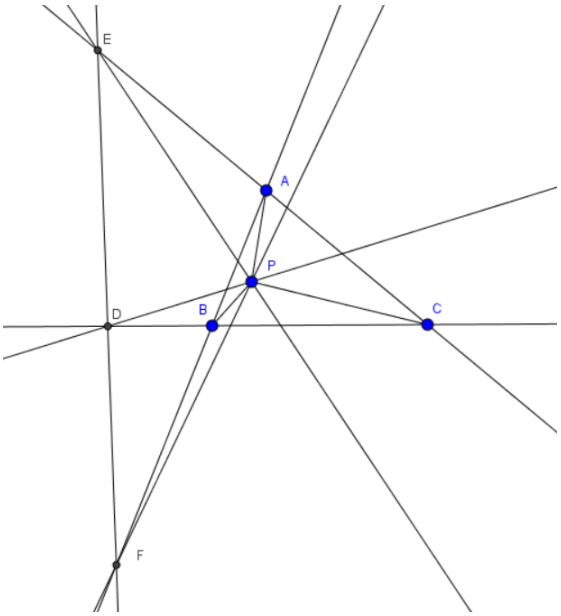
然而，在這些題目中，有時候讀者可能會問：到底為什麼會想到要對這個點反演、到底為什麼會觀察出這件事，諸如此類的問題。我也只能將這一切訴諸於經驗，在實際解題或是考試中，有時要嘗試看看各種做法，有時要依靠過往的經驗猜測有沒有額外的性質，這都沒有一個準則，因此幾何是一個需要大量練習才能精熟的主題，所以建議讀者，以下的題目可以先自行嘗試看看，再搭配解答服用！

題目 1 三角形 ABC 內有一點 P，作 BPC 弧中點 D，同樣做出 E, F，試證明：$PDEF$ 四點共圓。



證明: 考慮以 P 為反演中心的反演變換，則原本的 BPC 外接圓反演後會變成 BC 直線，所以 D 在 BC 上，所以我們要決定反演後 D 的位置等於要問說 PD 直線是誰，然而在原圖中可以發現，D 是 BPC 弧中點告訴我們，PD 是 $\angle BPC$ 的外角平分線 (這可以透過簡單的角度計算得到)，而這件事在反演後不會變，而最後要證明的 $PDEF$ 共圓反演後就是 DEF 共線，所以我們的命題就變成：

三角形 ABC 內有一點 P，作 $\angle BPC$ 外角平分線交 BC 於 D，同樣做出 E, F，試證明：DEF 三點共線。



然而這個命題相較於原題是相當簡單的，因為我們都知道，根據梅涅勞斯定理，這

相當於要證明

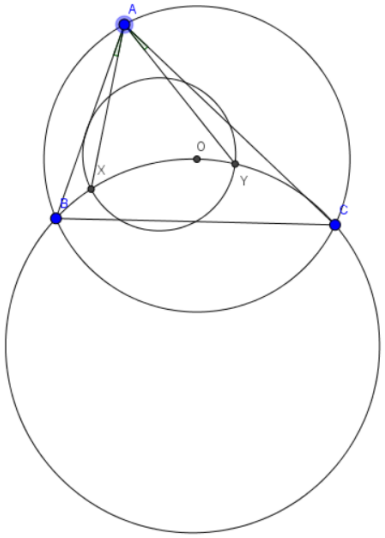
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1$$

然而我們有外角平分線性質

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$$
$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}}$$
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

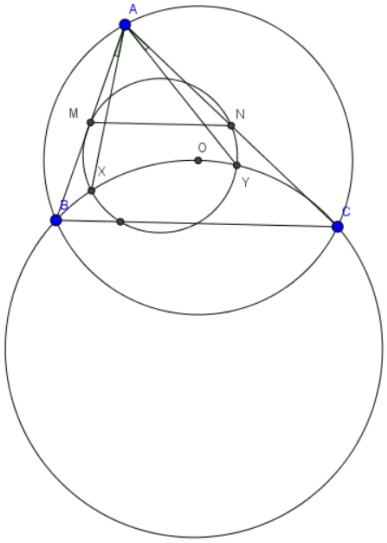
所以就證明完畢了！ □

題目 2 三角形 ABC，令 O 為外心，X,Y 為 ABC 九點圓與 BOC 外接圓交點。試證明：$\angle BAX=\angle CAY$

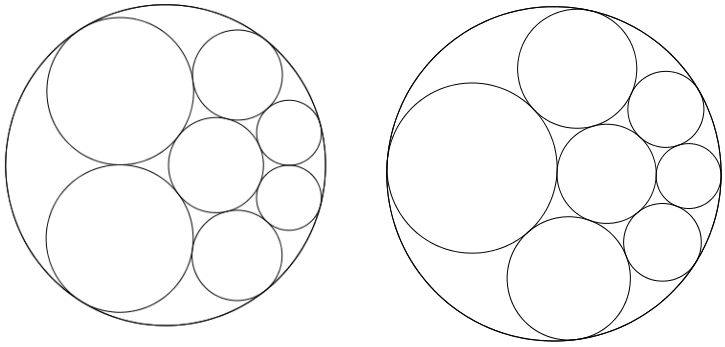


證明: 考慮以 A 為反演中心，$\frac{\overline{AB}\,\overline{AC}}{2}$ 為反演冪的變換，之後再對 $\angle BAC$ 的內角平分線鏡射，這個變換會把 B 送到 AC 中點 N，C 送到 AB 中點 M，O 原本是 ABC 外接圓圓心，所以會送到 A 對 MN 的對稱點，也就是 A 對 BC 的垂足，所以 BOC 外接圓會被送到 ABC 九點圓，也就有 ABC 九點圓會送到 BOC 外接圓，所以 $\{X,Y\}$ 會送到 $\{X,Y\}$，然而我們中間和成了一個角平分線變換，所以可以得到 X 會送到 Y，Y 送到 X，所以直線 AX,AY 對角平分線對稱，也就有 $\angle BAX=\angle CAY$ 了！ □

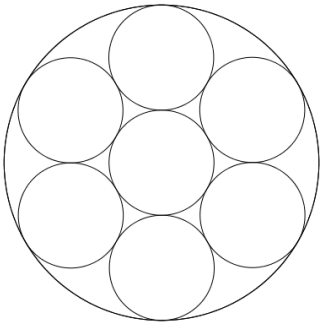
附註 事實上，在解這題時應該是先畫出對 A 反演後的圖，然後發現與原本的圖相似，所以可以透過適當的選取反演冪，再合成一個鏡射變換，讓兩張圖重疊再一起，就可以得出本題中的 X,Y 的關係了。



題目 3 有兩個內離圓 Ω_1, Ω_2，給定圓 O_1 與 Ω_1, Ω_2 皆相切，作 O_2 與 Ω_1, Ω_2, O_1 相切，如此做 $O_3, O_4, ..., O_n$(逆時針方向)，若 O_n 與 O_1 相切，請證明從不同的 O_1 出發，也會得到 O_n 與 O_1 相切。

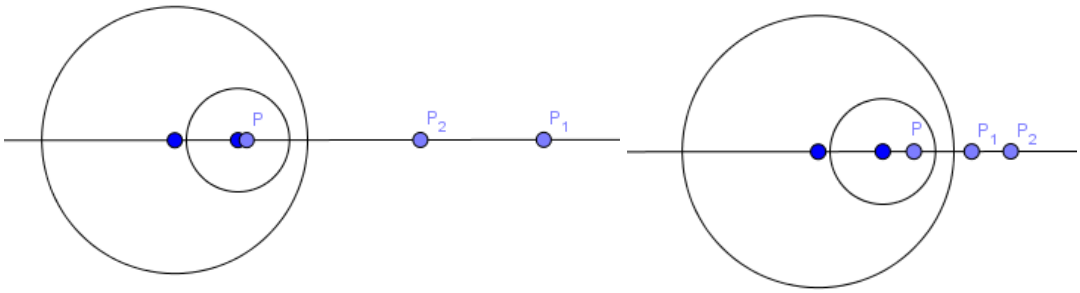


證明: 首先，我們會發現如果 Ω_1, Ω_2 是同心圓的話，這個命題是顯然的，而我們又知道反演會保持廣義圓以及相切性質，所以當 Ω_1, Ω_2 不是同心圓時，我們的問題就變成是否存在一個點 P，使得以 P 為反演中心的反演變換會把 Ω_1, Ω_2 變成同心圓？

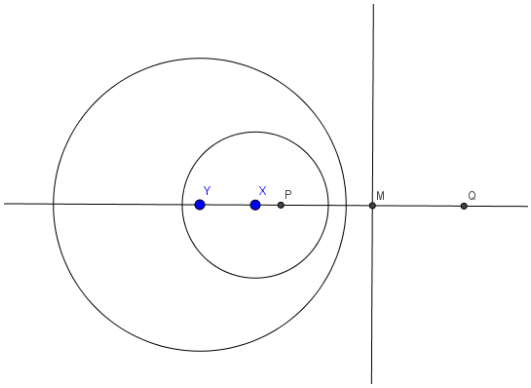


事實上答案是肯定的，以下我將給出兩種方法證明這件事。

方法一: 首先我們注意到這個反演點一定會落在 Ω_1, Ω_2 的圓心連線上，而我們又由性質7可知，我們要在這條線上找一個點 P，使得 P 對兩圓反演後是同一個點，不失一般性假設 Ω_1 在 Ω_2 內部，我們將 P 從 Ω_1 的圓心往遠離 Ω_2 方向移動時，P 對 Ω_1 的反演點 P_1 一開始比 P 對 Ω_2 的反演點 P_2 更遠離 Ω_1 圓心，然而將 P 拉到 Ω_1 上的時候則相反，而這個操作是連續的，所以根據中間值定理 (或是勘根定理)，我們可以得到在某個點時 P_1, P_2 會重疊，也就得證了。



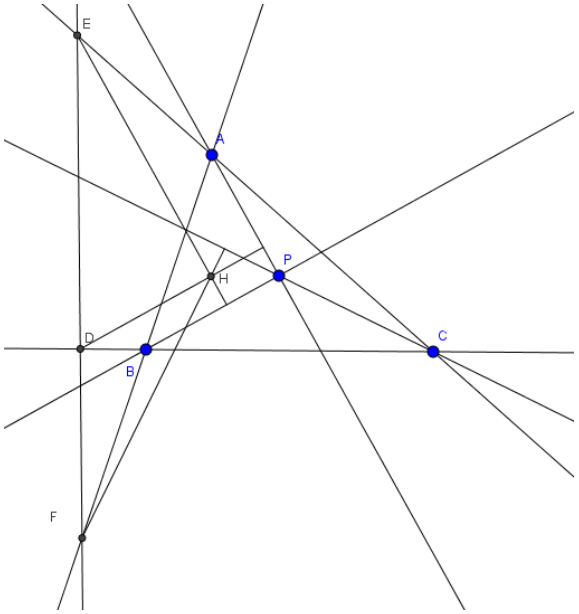
方法二: 在這個方法中，我會給出一個確切的構造。首先，令兩圓的根軸 (到兩圓冪相等的直線) 交兩圓的連心線於 M，令 M 到兩圓的冪為 k^2，則做連心線上兩相異點 P, Q，使得 $\overline{PM} = \overline{QM} = k$，以下我們將證明 P 對兩個圓反演後的都會得到 Q。



令 Ω_1 的圓心為 X，則我們有 $\overline{XP}\ \overline{XQ} = \overline{XM}^2 - k^2 = r_1^2$，其中 r_1 是 Ω_1 的半徑長，所以 P 對 Ω_1 反演後得到 Q，同理 P 對 Ω_2 反演後也會得到 Q。 □

附註 這題屬於比較奇特的的題型，而結果相當漂亮。然而在方法一中，讀者需要熟知一些微積分的知識才能寫下較為嚴謹的證明，在方法二中，實際上是用到調和點列的性質，了解調和點列的讀者可以自行觀察看看。

題目 4 三角形 ABC 的垂心 H，P 是任一點，過 H 做 AP, BP, CP 的垂線與 BC, CA, AB 交於 D, E, F，證明 DEF 共線。



證明: 令 H 對 AP, BP, CP 垂足分別為 X, Y, Z，H 對 BC, CA, AB 的垂足分別為 R, S, T，則 $AXRD$ 四點共圓，所以

$$\overline{HD}\ \overline{HX} = \overline{HA}\ \overline{HR}$$

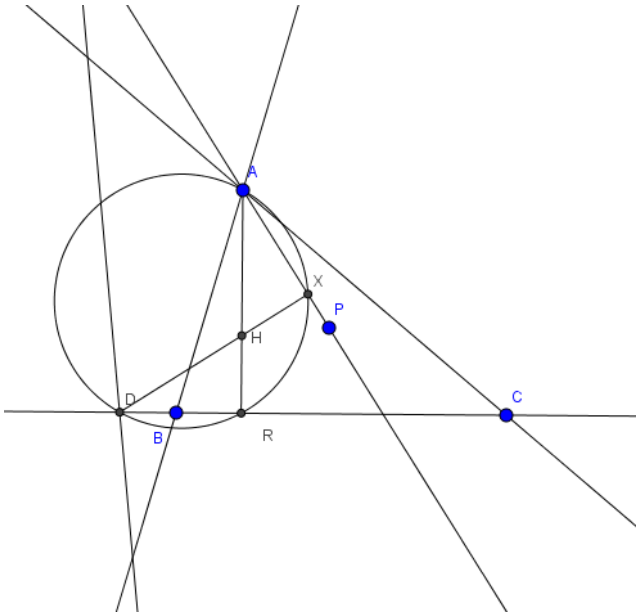
同理，我們會有

$$\overline{HE}\ \overline{HY} = \overline{HB}\ \overline{HS}$$

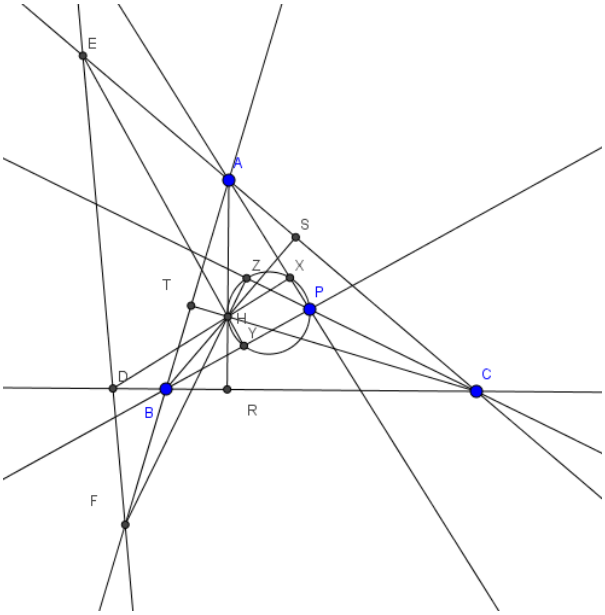
$$\overline{HF}\ \overline{HZ} = \overline{HC}\ \overline{HT}$$

又因為 $ABRS$ 四點共圓、$BCST$ 四點共圓，所以

$$\overline{HA}\ \overline{HR} = \overline{HB}\ \overline{HS} = \overline{HC}\ \overline{HT}$$

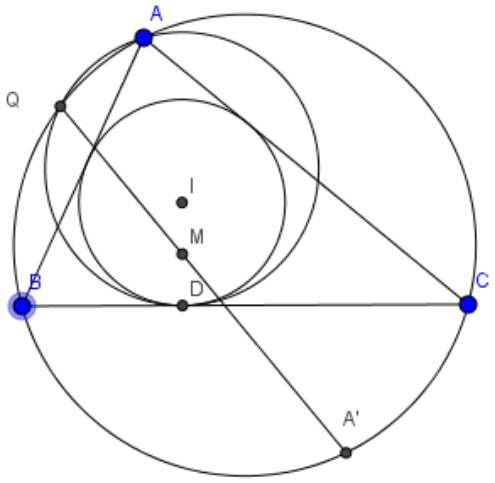


若我們取 H 為反演中心，$-\overline{HA}\,\overline{HR}$ 為反演冪的反演變換，則 A 跟 R 互反、B 跟 S 互反、C 跟 T 互反、D 跟 X 互反、E 跟 Y 互反、F 跟 Z 互反，而原命題要證的 DEF 共線等價於 $HXYZ$ 共圓，然而這是顯然的，因為 $\angle HXP = \angle HYP = \angle HZP = 90°$，所以就證明完畢了！ □



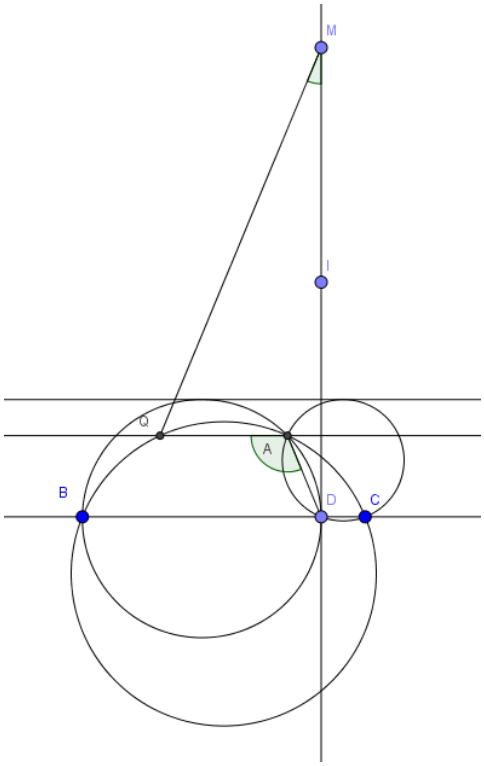
附註 在這題當中，若想將原命題直接對 H 反演，這會讓命題變得十分醜陋，然而我們在原圖中找尋一些性質後，再進行適當的反演則能巧妙的處理這題，所以有時候用反演處理題目的時候，應該把兩邊的命題做互相比較，而非僅專注於某一側。

題目 5 三角形 ABC，內心為 I，內切圓切 BC 於 D，ID 中點為 M，A' 為 A 的對徑點，$A'M$ 交外接圓於另一點 Q，請證明 QDA 外接圓與 BC 相切。



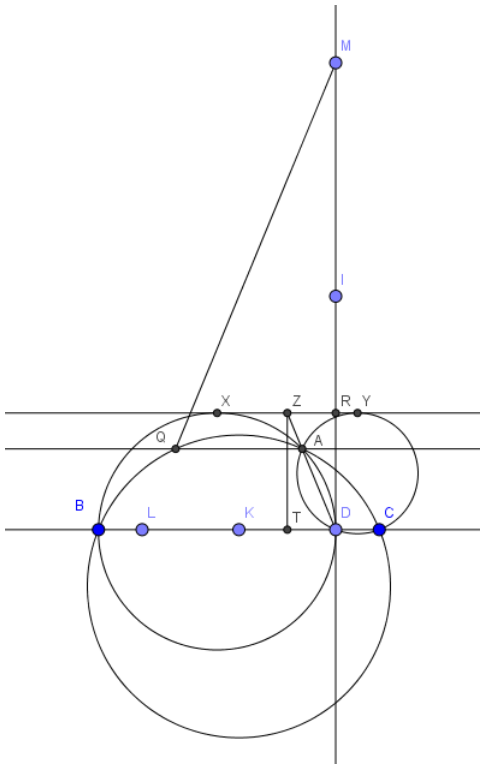
證明: 首先發現有三個物件同時相切於 D 點，進而發現對 D 反演是可行的，而若我們欲使用同一法，先假設 Q 是過 A,D 且與 BC 相切於 D 的圓與 ABC 外接圓交點 (異於 A)，則我們要證明 QMA' 共線，然而我們並不好確定 A' 反演後的位置，所以我們將命題改為證明 $\angle AQM = 90^\circ$，也就是 $\angle DQA - \angle DQM = 90^\circ$。

將以上命題對 D 反演後，原圖中的直線 BC、AQD 外接圓、ABC 內切圓會變成由下而上依序三條平行線 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$，其中 D 在 Γ_1 上，而原圖中的直線 AB, AC 分別變成過 BD, CD 與 Γ_3 相切的圓 Ω_1, Ω_2，而 A 則是這兩圓的交點，Q 是 ABC 外接圓與 Γ_2 的交點，然而如此一來 $QABC$ 是一個等腰梯形，而 I 是 D 對 Γ_3 的對稱點，M 是 D 對 I 的對稱點，欲證明 $\angle DAQ - \angle DMQ = 90^\circ$。

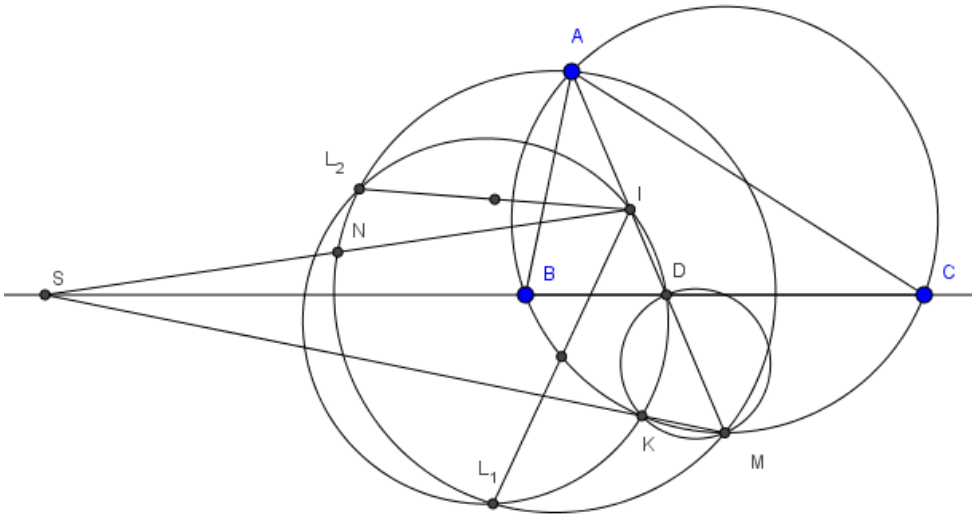


令 Ω_1, Ω_2 分別與 Γ_3 切於 X, Y，令 Z 為 X, Y 中點，則 Z 到 Ω_1, Ω_2 的冪相同，所以 ZAD 共線。令 Z 對 Γ_1 的垂足為 T，則由於 X, Y 分別在 BD, CD 中垂線上，我們可以透過簡單的長度計算得到 D 對 T 的對稱點 K 恰好是 B, C 中點。令 L 是 D 對 K 的對稱點，由於 D, A 對 BC 中垂線對稱後的點分別為 Q, L，所以 QL 平行 TR，其中 R 是 D, I 中點，然而 $\frac{\overline{DL}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{DR}} = 4$，所以 ML 平行 TR，也就是 LQM 共線，且 $\angle DAQ - \angle DMQ = 90^\circ$。 □

附註 本題中對內切圓切點反演是一個有用的方法，在 2017 年台灣選訓也曾出現過類似的方法可以處理的題目。

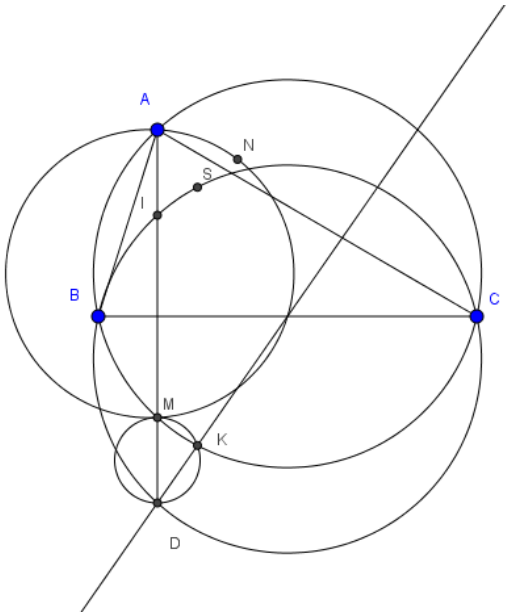


題目 6 令 ABC 為一個不等邊三角形，令他的外接圓為 Ω、內心為 I。射線 AI 交 $\overline{BC}$ 於 D、交 Ω 於 M。$\overline{DM}$ 直徑圓交 Ω 再一次於 K。直線 MK 和 BC 交在 S，令 N 是 $\overline{IS}$ 的中點，$\triangle KID$ 和 $\triangle MAN$ 的外接圓交在 L_1 和 L_2。證明 Ω 通過 $\overline{IL_1}$ 或 $\overline{IL_2}$ 的中點。



證明: 考慮一個以 I 為反演中心的反演變換，則 I 會變成 ABC 的垂心，原圖中的直線 BC 會變成 BIC 外接圓，而 D, M 則分別是 AI 與 ABC 外接圓、BIC 外接圓的交點，而原本的 DM 直徑圓是通過 D, M，且圓心在 AI 上的圓，這三件事反演後都不會

變，所以反演後依然是 DM 直徑圓，而 K 是 DM 直徑圓與 ABC 外接圓的交點，S 是 MIK 外接圓與 BIC 外接圓的交點 (異於 I)，但事實上 I 跟 M 對於直線 BC 對稱，所以 S 是 K 對直線 BC 的對稱點，N 是 I 對 S 的對稱點，L_1, L_2 是直線 KD 與 MAN 外接圓的兩個交點，要證明 I 對 L_1 或 L_2 的對稱點落在 ABC 外接圓上。



然而，圖畫的夠準的話 (或是熟知一些性質、又或是用 GGB 做題) 的讀者們會發現，直線 KD 與 MAN 外接圓的其中一個交點會是 B, C 中點，而因為 I 是垂心，所以 I 對 B, C 中點鏡射會落在圓上。

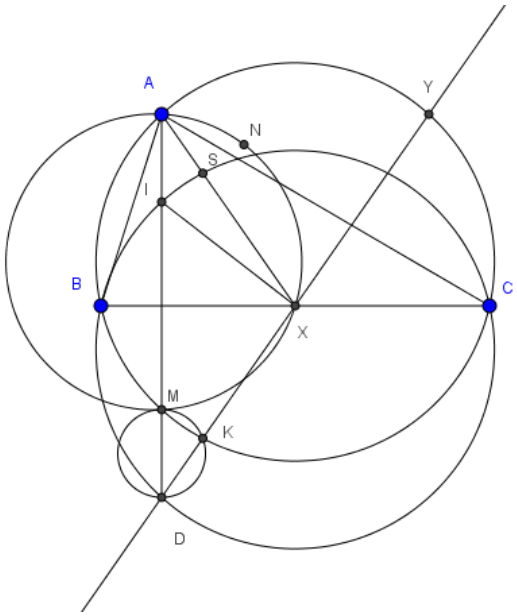
所以我們剩下的就是證明上述的發現，令 B, C 中點為 X，連接 DX 交 ABC 外接圓於一點 Y，且 D, Y 在直線 BC 異側，則由於 A 與 D 對直線 BC 鏡射，所以直線 AY 平行直線 BC，所以 MY 是 ABC 外接圓的一條直徑，這告訴了我們 $\angle MKY = 90^\circ$，而我們又有 $\angle MKD = 90^\circ$，也就是 D, K, X, Y 四點共線。

我們剩下的就是要證明 X, M, A, N 四點共圓，然而因為直線 AX 是 I, N 的中垂線，所以

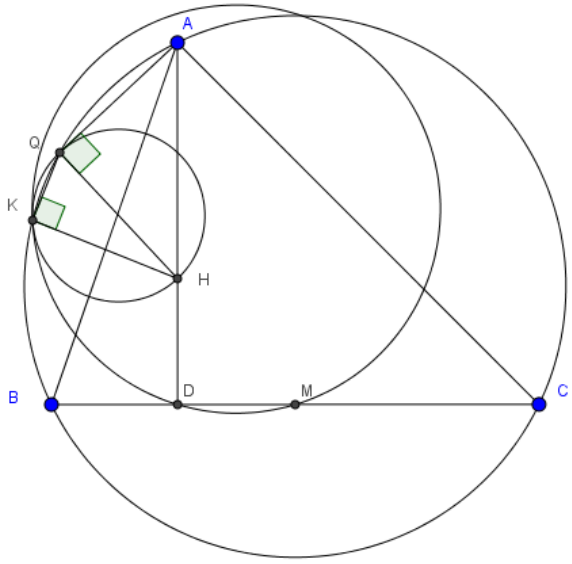
$$\angle ANX = \angle AIX = 180^\circ - \angle MIX = 180^\circ - \angle IXM$$

所以 X, M, A, N 四點共圓，證畢！ □

附註 在這題當中，反演雖然不能幫助我們直接的做出題目，但卻幫我們把一個我們不知道的點 (I, L_1 中點)，轉換成我們已知的點 (實際上是 A 的對徑點)，正如一開始所說，反演可以幫助我們更快的找到一些隱藏的性質。

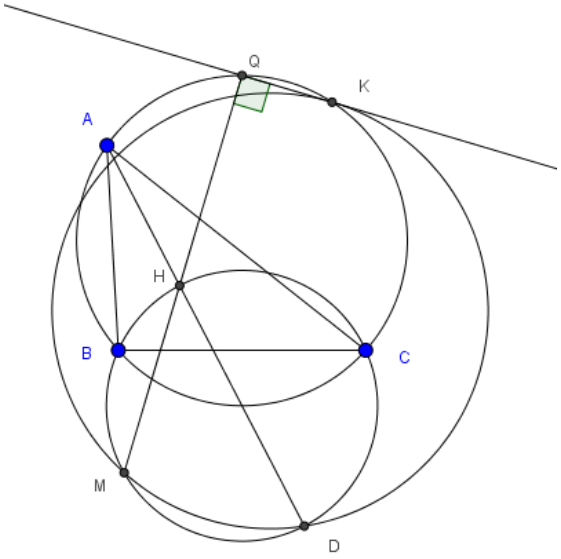


題目 7 三角形 ABC，垂心為 H，A 到 BC 的垂足為 D，BC 中點為 M，在 ABC 外接圓上找一點 Q 使得 $\angle AQH = 90°$，再在 ABC 外接圓上找一點 K 使得 $\angle QKH = 90°$，試證明；QKH 外接圓與 KDM 外接圓相切



證明: 首先，我們注意到前面一直出現的性質：直線 HM 會通過 A 的對徑點，然而 $\angle AQH = 90°$，所以 Q, H, M 三點共線。

考慮一個以 H 為反演中心的反演變換，反演後 H 是三角形 ABC 的內心，D 是直線 AH 與 BHC 外接圓的交點，Q 在原圖中落在 AH 直徑圓與 ABC 外接圓交點上，所以反演後落在過 A 垂直 AH 的直線與 ABC 外接圓交點上，也就是 BAC 弧的弧中點，而 M 則是直線 QH 與 BHC 外接圓的交點，最後 K 是過 Q 垂直 QH 的直線與 ABC 外接圓的交點，要證明的命題變成直線 QK 與 KDM 外接圓相切。

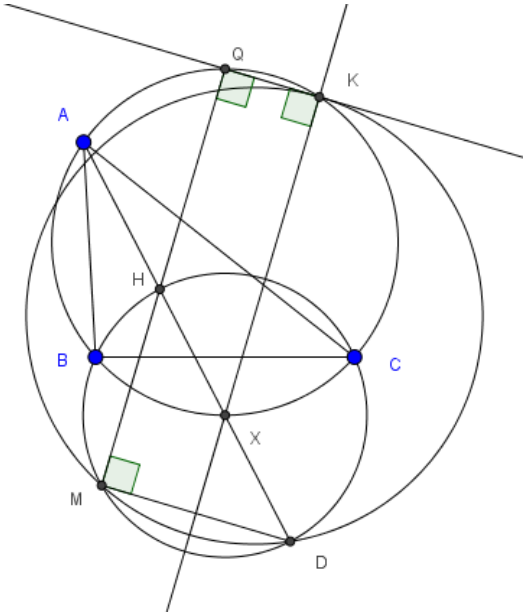


而我們發現圖中正好有雞爪定理的圖形，或許有些讀者沒看過這個定理，這個定理可以透過簡單的角度計算得出，也可以用反演得到，這部分留給讀者練習，而定理敘述如下：

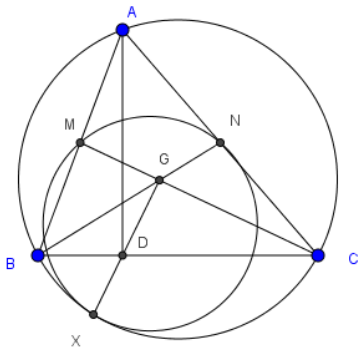
定理 4 一個三角形 ABC 的內心、A-旁心、B、C 四點共圓，且此圓圓心為 BC 弧 (不含 A) 的弧中點。

透過上述定理我們可以發現，若我們令 X 為 BC 弧 (不含 A) 的弧中點，則 X 為 HBC 外接圓圓心，而 QX 是 ABC 外接圓的一條直徑，所以 $\angle QKX = 90°$，所以直線 KX 平行直線 QM，又因為 HD 是 HBC 外接圓的直徑，所以 $\angle HMD = 90°$，這告訴我們直線 KX 垂直直線 MD，然而 X 又在 M, D 中垂線上，所以直線 KX 就是 M, D 的中垂線，這告訴我們 KDM 是一個以 K 為頂點的等腰三角形，然而 QK 垂直這個等腰三角形的高，所以 QK 與 KDM 的外接圓相切。 □

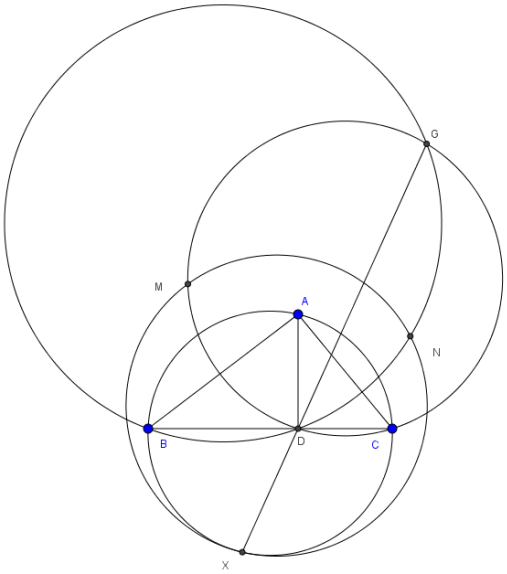
附註 這題是 2015 年 IMO 的第三題，然而對於熟悉反演的人來說，做出這題所需的時間並不久，難度也不高，筆者身邊的幾位退役國手在這題考出來時一致認為這是近幾年來最簡單的三六題，這更顯現出反演的重要性了！



題目 8 三角形 ABC，A 到 BC 垂足為 D，重心為 G，AB、AC 邊中點分別為 M、N，做一圓 Ω 過 M, N 且與 ABC 外接圓相切，切點為 $X(\neq A)$，試證明：GDX 共線。

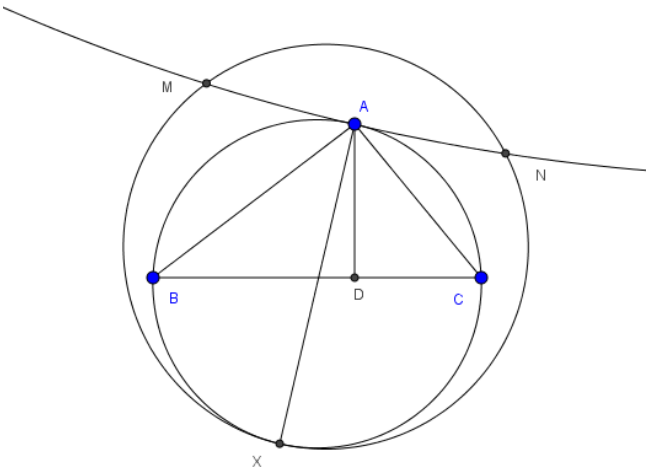


證明: 考慮一個以 D 為反演中心的反演變換，則 D 依然是 A 對直線 BC 的垂足，而因為在原圖中 M, N 分別是 ABD, ACD 外接圓圓心，所以反演後 M, N 分別是 D 對 AB, AC 的對稱點，而 G 則變成 BDN 外接圓與 CDM 外接圓的交點 (異於 D)，Ω 是過 M, N 與 ABC 外接圓相切的圓，X 是兩圓切點，欲證明 GDX 共線。



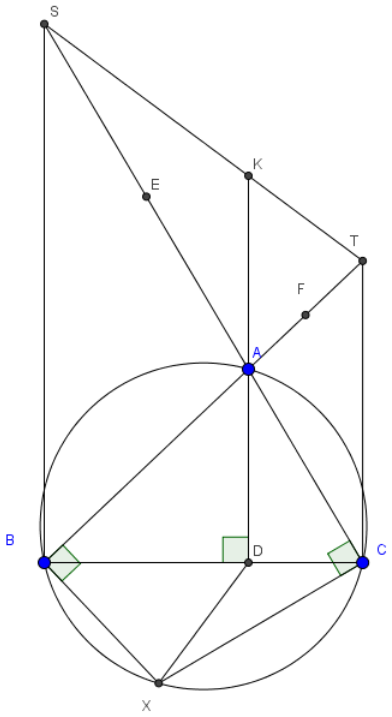
雖然這命題看起來比原命題醜，但我們可以發現 X 會是 A 對 ABC 外接圓的對徑點 (這件事實際上並不是很簡單就能發現，但其實是有脈絡可循的)，所以我們若令 X 是 A 對 ABC 外接圓的對徑點，則我們要證明 GDX 共線且 MNX 的外接圓與 ABC 外接圓相切。

我們首先證明 MNX 的外接圓與 ABC 外接圓相切，事實上我們有 AX 是 M, N 的中垂線，這是因為 $\overline{AM} = \overline{AD} = \overline{AN}$，且 $\angle MAX = \angle BAC = \angle NAX$，然而我們從原命題可以發現，$MAN$ 外接圓與 ABC 外接圓會相切，綜合上述事實可以得到 MNX 的外接圓與 ABC 外接圓相切。



接著我們證明 GDX 共線，首先發現 GD 是 BDN 外接圓與 CDM 外接圓的根軸，若我們令 E, F 分別為兩圓的圓心，則 GDX 共線等價於證明 $DX \perp EF$，然而因為 D, N 的中垂線是 AC，D, M 的中垂線是 AB，所以 E, A, C 共線，F, A, B 共線，令

A 對 E,F 的對稱點分別為 S,T，則直線 ST 平行直線 EF，且直線 SB,TC 皆垂直於 BC。



令直線 AD 交直線 ST 於 K，則 $\frac{\overline{SK}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$，這告訴我們了以下交比相等：

$$(XB, XC; XD, BC) = (AS, AT; AK, ST) = (AT, AS; ST, AK)$$

然而 $XB \perp AT, XC \perp AS, BC \perp AK$，所以 $DX \perp ST$，證畢！ □

附註 這題乍看之下不能反演，但事實上對 A, D, X 反演都有辦法做出這題，然而對 A, X 反演後的命題十分相似，而對 D 反演後相對簡單一些。

若讀者沒聽過交比，或是對交比的定義及使用不熟的話，可以上網搜尋「交比」，而上述使用到的事實用交比的說法來說並不難證明。

5 習題

習題 1 直線 Γ 交圓 Ω_1 於兩點，A 為 Γ 所截弧的中點，圓 Ω_2 內切 Ω_1 於 X，切 Γ 於 Y，且跟 A 在 Γ 異側。證明：AXY 共線。

習題 2 從 O 射出四條射線 $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$(依序逆時針)，$\Gamma_1\Gamma_3$ 夾角 $= \Gamma_2\Gamma_4$ 夾角，圓 ω_1 切 $\Gamma_1\Gamma_3$，圓 ω_2 切 $\Gamma_2\Gamma_4$，且 ω_1、ω_2 交於兩點 X、Y。證明：直線 OX 與 Γ_1 的夾角 $=\Gamma_4$ 與直線 OY 的夾角。

習題 3 給定三角形 ABC，分別做三個內 (外) 偽切圓與 ABC 外接圓的切點，將三個切點與其對應的頂點連線，試證明這三線共點。

習題 4 有一線段 $\overline{AB}$，以 $\overline{AB}$ 為直徑做圓 Ω_1，做 Ω_2 切 $\overline{AB}$ 於 X，切 Ω_1 於 Y，且 Ω_2 在 Ω_1 內側，過 B 做直線 Γ 垂直 $\overline{AB}$，A 連 Ω_2 圓心交 Γ 於 C。試證明：$\angle CYX = 90°$

習題 5 已知兩圓 P, Q，並且有一圓 O 與這兩圓依序外切於 A, B，P, Q 的外公切線依序切兩圓於 D, E，試證明：
1.$\overline{AD}$,$\overline{BE}$ 交在圓 O 上
2.A, B, D, E 四點共圓
3.$\overline{AB}$,$\overline{DE}$,PQ 的連心線三線共點。

習題 6 三角形 ABC，有一圓切 $\overline{BC}$ 與 ABC 外接圓，分別切於 D, E，且圓心在角平分線上，試證明 $\angle DAB = \angle EAC$。

習題 7 X 和 Y 在 BC 直線上使得 $\widehat{XAY} = 90$，A 是 BC 外一點，令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心.X' 和 Y' 分別是 (BH, AX) 和 (CH, AY) 的交點。證明 $\triangle CYY'$ 的外接圓、$\triangle BXX'$ 的外接圓和 $X'Y'$ 共點。

習題 8 令 $\triangle ABC$ 是一個銳角三角形，兩高 AD 和 BE 交於 H。令 M 為 AB 中點，圓 DEM 和圓 ABH 交在 P 和 Q，P 跟 A 在 CH 同側。證明 ED, PH, MQ 過圓 ABC 上一點。

習題 9 給定三個彼此不相交的圓 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$，試求所有點 P 的軌跡使得 P 滿足：P 對三個圓的極線共點。

習題 10 兩圓 O_1 和 O_2 交於 M 和 N。靠近 M 的公切線分別交 O_1 和 O_2 於 A 和 B。令 C 和 D 分別為 A 和 B 對 M 鏡射。圓 DCM 分別交 O_1 和 O_2 於 E 和 F 異於 M。證明圓 MEF 和圓 NEF 一樣大。