微積分與函數方程

趙庭偉

July 29, 2018

1 前言

在這篇講義中，我們會試著滿足小時候某種幻想。我相信對於蠻多人 (至少我) 在剛開始學習函數方程的時候都會幻想如果可以確定解答是多項式或是連續函數該有多好。然而這幻想很快地就會被一些函方的奇怪解給毀滅，例如：科西方程。不過對於大多數函方，他們的解都是”好的”，這裡”好的”可能是指連續或可微。所以接下來我會列出一些微積分中會教到的定義、定理、性質，然後使用它們處理函方問題。不過因為用到的工具大多會需要使用大量不等號，所以可以處理的問題就侷限在 $\mathbb{R}^+$ 以及少數 $\mathbb{R}$ 的函方。

2 你會數數嗎

首先，我們要先來了解集合的大小到底是什麼意思，雖然這跟後續內容關連不大，但我認為可數與不可數的概念在微積分裡面是相當重要的。

問題 給定兩個集合，他們什麼時候一樣大？{ 狗狗，貓貓，眼皮，鴨子 } 跟 $\{1,2,4,5\}$ 這兩個集合是不是一樣大？正整數跟整數呢？實數呢？

答案 我們發現在有限的時候，兩個一樣大的集合間會有一個雙射函數 (也就是單射且滿射)，如果一個比另一個大的時候，存在從小的送到大的的單射函數。所以我們想把這個定義推廣到元素個數無窮的時候。

定義 1 兩個集合 A,B，我們說 $|A|=|B|$ 代表存在雙射函數 $f:A\to B$

性質 1 對於任意集合 A,B,C，我們都有
1.$|A|=|A|$
2. 如果 $|A|=|B|$，那麼 $|B|=|A|$
3. 如果 $|A|=|B|,|B|=|C|$，那麼 $|A|=|C|$

證明: 首先，第一條是顯然的，因為我可以找到把每個元素都映射到自己的函數，這個函數顯然是雙射的。第二條則是因為任意的雙射函數都存在反函數。而第三條則是因為 A 送到 B 的雙射函數合成 B 送到 C 的雙射函數是一個 A 送到 C 的雙射函數。 □

附註 通常我們會稱第一條叫做自反性，第二條為對稱性，第三條為傳遞性，如果一個關係滿足這三條則稱為等價關係，而想像中等價關係就是把我們所關心的物件分成一包

一包的，每一包內兩兩都滿足這個關係 (在上述情況中就是把集合分成好幾類，每一類的大小都一樣大)

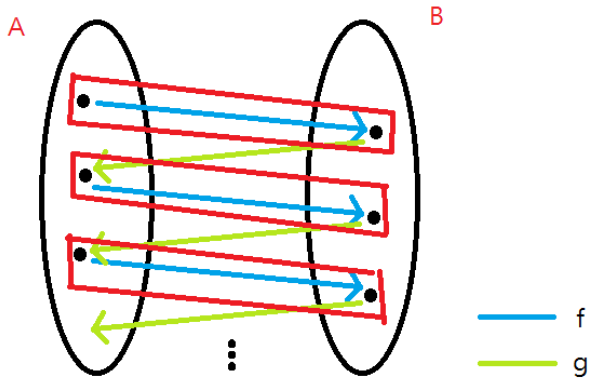
定義 2 兩個集合 A, B，我們說 $|B| \geq |A|$ 代表存在單射函數 $f : A \to B$

附註 如果存在單射函數 $f : A \to B$，則存在滿射函數 $g : B \to A$。這命題反過來在承認選擇公理的情況下會對，不承認的情況下我也不知道。

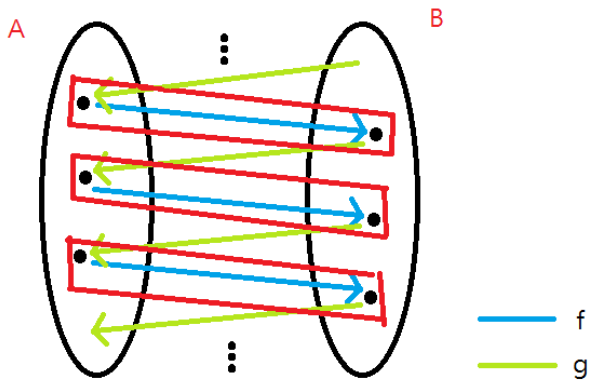
性質 2 對於任意集合 A, B, C，我們都有
1. 如果 $|A| \geq |B|, |B| \geq |C|$，那麼 $|A| \geq |C|$
2. 如果 $|A| \geq |B|, |B| \geq |A|$，那麼 $|A| = |B|$

證明: 第一條是因為一個 C 送到 B 的單射函數合成 B 送到 A 的單射函數是一個 C 送到 A 的雙射函數。

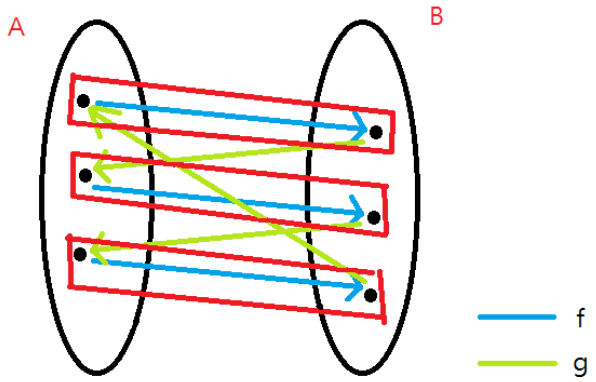
然而第二條的證明則比較技巧性一點，由條件我們可以知道存在單射函數 $f : A \to B$ 以及單射函數 $g : B \to A$，我們考慮對於 A 或 B 中的任意元素 x，考慮所有可以透過 f, g 交互迭代走到他，或是他可以走到的元素們，則由於 f, g 單射，我們只會有三種情形：
1. 有起點的鏈：從起點出發，可以把鏈上的點做兩兩配對。



2. 兩端無窮長的鏈：把每一個 A 中的點 a 與 $f(a)$ 兩兩配對。



3. 一個圈：把每一個 A 中的點 a 與 $f(a)$ 兩兩配對。



綜合上述，我們把 A 跟 B 的點之間做了一個一一對應，所以令我們要找的雙射函數為這個對應，就證明完畢了！ □

定義 3 如果 $|A| \leq |\mathbb{N}|$，那我們稱 A 為可數多個

性質 3 如果 A 有無窮多個元素，且 A 可數，則 $|A| = |\mathbb{N}|$

證明: 根據假設，存在單射函數 $f : A \to \mathbb{N}$，令 $f(A) = \{a_1 < a_2 < ...\}$，其中 $f(A)$ 代表 A 對應過去的值域，則令 $g : f(A) \to \mathbb{N}$，$g(a_i) = i$，則 $g \circ f : A \to \mathbb{N}$ 是一個雙射函數。 □

練習 1

1.$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{狗狗\}|$

2.$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

3.$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$

4.$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

證明: 事實上，我們要證明的就是上述四條的右邊的集合是可數的，也就是我們可以找到一個編號方法，把集合內每個元素編號。

第一條我們可以給狗狗編號 1，1 編號 2，2 編號 3，以此類推。

第二條我們依序給 $0, 1, -1, 2, -2, ...$ 編號。

第三條我們可以用「對角線方法」編號，順序為 $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1)...$。

第四條實際上可以簡單的證明 $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$，這部分讓讀者自行思考。 □

附註 這些實際上是著名的希爾伯特旅館問題，有興趣的讀者可以自行搜尋原始敘述。

定理 1 $|\mathbb{R}| \gneq |\mathbb{N}|$

證明: 我們在之後會實際的建構實數，而在這裡我們先把實數當成是整數部份加上任意寫的小數部分，但是小數後若干位的 $999...$ 跟把 9 都捨去後前一位加 1 的有限小數是相同的 (例如 $2.999... = 3$)。

事實上，我們可以證明 $(0, 1]$ 區間的實數就比 $\mathbb{N}$ 還多，若命題為前者否，則我們可以把 $(0, 1]$ 區間的實數用正整數編號，假設第 i 號的實數是 a_i，我們考慮把所有實數做十進制展開，而且每個數都展開成無窮小數 (結尾不是 $000...$)，並選取一個實數 $x \in (0, 1]$ 滿足：x 在小數點後第 i 位跟 a_i 不同，且 x 不是有限小數。則 x 根本沒被數到，矛盾！ □

3 數系建構

在了解微積分之前，我們應該要先了解我們平常在操作的數到底是什麼，所以在這個章節中，將會先介紹整數、有理數、實數的建構過程，以及一些基本的性質。

定義 4 (皮亞諾公設) 正整數的建構如下：

1.1 是正整數。

2. 每一個正整數 a，都有唯一一個它的後繼數 a' 是正整數。

3. 兩個正整數相等若且唯若他的後繼數相等。

4.1 不是任何正整數的後繼數。

5. 任意關於正整數的命題，如果證明了它對正整數 1 是對的，又假定它對正整數 n 為真時，可以證明它對 n' 也真，那麼命題對所有正整數都真。

然而我們實際上可以在上面定義 $+, \times, \geq$，而我們也可以將正整數、「零」、「負整數」

(建構方法可以直接視為另一坨正整數) 蒐集起來，定義為整數，而可以發現這樣形成的集合是一個加法群，大致說起來就是上面也有 $-$ 運算。

定義 5 一個集合 S 上的關係 $\sim$ 為一堆 $(a,b) \in S \times S$(記為 $a \sim b$) 所形成的集合，若一個關係 $\sim$ 滿足：

1.$x \sim x$

2.$x \sim y \Rightarrow y \sim x$

3.$x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

則稱 $\sim$ 為一種等價關係。

可以想像如果有一種等價關係就可以把 S 分成很多包東西，每一包裡面任兩個元素都等價，考慮把每一包當成一個元素，形成的集合定為 $S/\sim$。

而進到有理數的建構，我們可以想像有理數是一堆由分子與分母所形成的數對 $S := \{(a,b)|a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$，但 $(1,2)$ 應該要跟 $(2,4)$ 是同一個有理數，所以我們應該要用上述的等價關係處理。

定義 6 令 $S := \{(a,b)|a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$，定義等價關係 $\sim$：

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$$

而有理數定為 $\mathbb{Q} = S/\sim$。

然而類似的也可以定義有理數上的 $+, -, \times, \geq$，然而注意到每個非零的有理數都找的到他的「乘法反元素」，所以我們在有理數上可以定義 $\div$。實際上我們在上述定義之前只知道整數上的 $+, -$ 運算，所以在定義中只能使用這些，而之後定義的有理數上的運算可以證明跟原先整數上的運算是一致的。

然而在定義實數的時候，我們想像中實數應該是用有理數逼近而得出的，所以我們應該要先嚴謹的定義「收斂」。

定義 7 定義數列 $a_1, a_2, ...$ 收斂到 a 為：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. } n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

記為 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，並稱 a 為這個數列的極限值。

附註 上述式子看似非常可怕，而他的意義為：當你選一個小小的距離 ε 時，當 n 夠大的時候 (也就是 $n > N$ 時) a_n 都要跟 a 距離小於 ε。

雖然上述定義目前只能在有理數上，但當我們建構完實數後，上述定義也可以適用在實數數列上。

所以我們可以來建構我們想像中的實數了，想像每個實數都是由一個遞增數列跟一個遞減數列夾出來的，而且這兩個數列可以任意的靠近，才會只夾出一個數，所以我們就有以下的定義了。

定義 8 令 $\{a_n\}$ 表示數列 $a_1, a_2, ...$，並令

$$S := \{(\{a_n\}, \{b_n\}) | \forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \in \mathbb{Q}, b_n > a_n, \{a_n\}\text{遞增}, \{b_n\}\text{遞減}, \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0\}$$

再定義等價關係 $\sim$：

$$(\{a_n\}, \{b_n\}) \sim (\{c_n\}, \{d_n\}) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$$

並定義實數為 $\mathbb{R} = S/\sim$。

同樣我們也可以定義實數上的 $+, -, \times, \div, \geq$，而且與有理數上的運算是一致的。

而我們造出的實數有一些性質，例如它滿足阿基米德性質，它是唯一一個有序完備體之類的，不過由於筆者比較偷懶 (?)，以下將會介紹實數的完備性，而在了解完備性之前，我們要先了解柯西數列的定義。

定義 9 若 $\{a_n\}$ 滿足：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } m, n > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

則我們稱它是一個柯西數列。

附註 上述定義大致上是說，給定一個小小的 ε，當項數夠大的時候 (也就是 $n, m > N$ 時)，任兩項的距離都會夠小。

性質 4 任何一個實數上的收斂數列都是柯西數列。

然而想像中柯西數列都要收斂，但我們不知道他的極限值會是誰，例如

$$1, 1.2, 1.23, ..., 1.23456789101112, ...$$

是一個有理數柯西數列，但我們無法在有理數裡面找到他的收斂值。

定理 2 (實數完備性) 所有實數柯西數列 $\{a_n\}$ 在實數裡會收斂，也就是存在實數 a 使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$。

在這我只會大致上描述定理的證明方法，細節將留給讀者思考。

實際上我們可以得到，當項數 n 夠大的時候，數列會有上下界，而我們可以適當的選取讓上下界都是有理數，每次都把上下界形成的區間切成一半，則該數列要嘛收斂到切開的位置，要嘛在項數更大之後只會落在某個區間內，而第二種情況可以造出一個有理數的遞增數列及遞減數列夾住這個數列，且上下距離收斂到 0，也就找到了原數列收斂到的實數了。

然而，鄉民們最常問的 0.999... 到底是怎麼回事呢？事實上我們寫無窮小數的意義，就是令 a_n 為它的小數點後前 n 位所形成的有限小數，而這個無窮小數所代表的實數值，就是 $\lim_{n\to\infty} a_n$，所以讀者應該可以發現 $0.999... = 1$ 了。(實際上這是較為正確的講法，

坊間流傳的 $\times 10$ 或是等比級數之類的說法，充其量只是一個解釋，並不是一個良好的證明)。

4 極限與連續

同樣的我們也可以定義一個函數的極限，並且進一步了解函數的連續性的意思。

定義 10 定義一個實數函數 $f(x)$ 當 x 趨近無限大的時候收斂到 a 為：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \text{s.t. } x > N \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

記為 $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$，並稱 a 為 $f(x)$ 當 x 趨近無限時的極限值。

定義 11 定義一個實數函數 $f(x)$ 當 x 趨近 b 的時候收斂到 a 為：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t. } 0 < |x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

記為 $\lim_{x\to b} f(x) = a$，並稱 a 為 $f(x)$ 當 x 趨近 b 時的極限值。

附註 注意到定義中的 $0 < |x - b| < \delta$ 告訴我們，$f(b)$ 並不必為 a。

附註 有時候我們會說一個數列或函數的極限是 ∞(或是 $-\infty$)，意思是說給定任意大的數 (負的任意大的數) 都可以找到足夠靠近或是足夠多項以後 (取決於在講數列或是函數的極限)，每一項都比這個數大 (小)。詳細的定義留給讀者自己寫寫看。

性質 5 極限值不一定存在，但若存在則極限值唯一。

證明: 若 $a \neq a'$ 都是某個收斂的極限值，則在定義中選取 $0 < \varepsilon < \frac{|a-a'|}{2}$，就會發現取值必須在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 中，也必須在 $(a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)$ 中，但這兩者沒有交集，矛盾！ □

性質 6 若 $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$ 皆存在，則：
1.$\lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n$
2.$\lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times b_n$
3. 若 $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$，則 $\lim_{n\to\infty} a_n \div \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \div b_n$

證明: 在這裡我們將只證明 $+$ 的情況，剩下部分手法類似，留給讀者自行思考，若有疑問，筆者相信坊間任意一本微積分教科書都有其證明。
假設 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$，給定任意 $\varepsilon > 0$，根據定義存在 N_1 使得對於所有 $n > N_1$，$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$(將定義中的 ε 用 $< \frac{\varepsilon}{2}$ 代入即可得到)，同理存在 N_2 使得對於所有 $n > N_2$，$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，則對於所有 $n > N$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

故可得到數列 $a_n + b_n$ 的極限值為 $a + b$，得證！ □

定理 3 (夾擠定理) 如果 $a_n \leq b_n \leq c_n$，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n, \lim_{n\to\infty} c_n$$

皆存在，則 $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n$。
更進一步的，若假設 $a_n \leq b_n \leq c_n$，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} c_n$$

存在且相等，則 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在且與其餘兩者相同。

證明: 令 $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n, \lim_{n\to\infty} c_n$ 分別為 a, b, c，對於所有 $\varepsilon > 0$，存在一個 N 使得對於所有 $n > N$

$$|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon, |c_n - c| < \varepsilon$$

所以我們可以得到

$$a - 2\varepsilon < a_n - \varepsilon \leq b_n - \varepsilon < b < b_n + \varepsilon \leq c_n + \varepsilon < c + 2\varepsilon$$

對於所有 $\varepsilon > 0$ 皆成立，所以 $a \leq b \leq c$。
而第二部分的證明，令 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = k$，對於所有 $\varepsilon > 0$，存在一個 N 使得對於所有 $n > N$

$$|a_n - k| < \varepsilon, |c_n - k| < \varepsilon$$

然而因為 b_n 界在 a_n, c_n 中間，所以 $|b_n - k| < \varepsilon$，也就得到了 $\lim_{n\to\infty} b_n = k$。 □

類似的我們也有函數版本的這些性質，而證明皆與數列版本類似：

性質 7 令 $b \in [-\infty, \infty]$，若 $\lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to b} g(x)$ 皆存在，則：
1.$\lim_{x\to b} f(x) \pm \lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b} f(x) \pm g(x)$
2.$\lim_{x\to b} f(x) \times \lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b} f(x) \times g(x)$
3. 若 $\lim_{x\to b} g(x) \neq 0$，則 $\lim_{x\to b} f(x) \div \lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b} f(x) \div g(x)$

定理 4 (夾擠定理) 令 $b \in [-\infty, \infty]$，如果 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$，且

$$\lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to b} g(x), \lim_{x\to b} h(x)$$

皆存在，則 $\lim_{x\to b} f(x) \leq \lim_{x\to b} g(x) \leq \lim_{x\to b} h(x)$。
更進一步的，若假設 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$，且

$$\lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to b} h(x)$$

存在且相等，則 $\lim_{x\to b} g(x)$ 存在且與其餘兩者相同。

在了解了極限的定義後，我們可以更進一步的定義最小上界以及最大下界，並在對他取極限以了解數列或函數在趨近時的情形。

定義 12 給定一個非空實數集合 S，我們稱 S 有上界代表存在一個 $M \in \mathbb{R}$，使得對於所有 $x \in S$，$x \leq M$，而 M 稱為 S 的一個上界；類似的我們可以定義 S 的下界；若 S 有上下界則稱為 S 有界。

性質 8 一個遞增有上界的數列會收斂，類似的一個遞減有下界的數列也會收斂。

證明: 假設 $a_1, a_2, ...$ 是一個遞增有上界的數列，若他不是柯西數列，則存在一個 $\varepsilon > 0$ 使得對於所有 $N \in \mathbb{N}$，都存在一組 $m, n > N$ 使得 $|a_m - a_n| > \varepsilon$，故可以得到有無窮多組這樣的 m, n，但根據遞增性，我們可以推出該數列沒有下界，矛盾！而根據實數的完備性，我們可以得到該數列收斂。 □

定義 13 給定一個實數集合 S，若 S 有上界，則所有 S 的上界中存在一個最小值，這個值稱為 S 的最小上界，記為 $\sup S$；類似的我們可以定義 S 的最大下界，記為 $\inf S$。

證明: 以下將大致敘述最小上界的存在性：我們考慮先取一個上界以及一個不是上界的數，每次操作都取現有兩數的平均，若這個平均是一個上界則取代原本的上界，否則則取代不是上界的數，並把被捨棄掉的數紀錄下來，如此操作那些被捨棄的數會形成一個數列，然後此數列兩兩之間的距離會一直變小，容易的可以證明他是一個柯西數列，根據實數的完備性他會收斂，然而這個收斂值可以證明他是一個上界，而且他是最小的，這兩部分若讀者足夠了解定義就可以自行證明，所以留給讀者思考。 □

定義 14 定義上極限 $\limsup$ 為：

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{m>n} a_m)$$

$$\limsup_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\sup_{y>x} f(y))$$

$$\limsup_{x\to b} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\sup_{x\in[b-\varepsilon,b+\varepsilon],x\neq b} f(x))$$

類似的可以定義下極限 $\liminf$。

性質 9 若 $\limsup = \liminf$，則極限存在，且與前述之值相同。反之，若極限存在，則 $\limsup = \liminf$ 且與極限值相同。

證明: 前者使用夾擠定理即可得到這個事實，後者則是由極限的定義可以直接推得。 □

定義 15 定義一個函數 $f(x)$ 在 x_0 連續為：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

也就是 $f(x)$ 當 x 趨近 x_0 的極限值是 $f(x_0)$。定義 $f(x)$ 在一個集合上連續代表 $f(x)$ 在這集合內所有點都連續。

性質 10 多項式、有理函數、指數、對數、三角函數在有定義的地方都是連續函數。

證明: 略。 □

性質 11 $f(x), g(x)$ 都是連續函數，則 $f(g(x))$ 在有定義的地方都是連續函數。

證明: 首先根據 g 的連續性，隨著 x 夠靠近 x_0，$g(x)$ 會夠靠近 $g(x_0)$，所以

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to g(x_0)} f(y) = f(g(x_0))$$

其中第一個等號是因為後者存在 (f 的連續性)，所以前者存在且等於後者。所以 $f(g(x))$ 是一個連續函數。 □

定理 5 (中間值定理) 如果 f 在 $[a,b]$ 連續，則給定 y 介在 $f(a)$ 跟 $f(b)$ 中間後，存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = y$。

證明: 證明方法與證明最小上界的存在性類似，先取 a, b，每次操作考慮兩者中點，並用他取代跟他在 y 同側的那個，並用捨棄掉的數形成一個數列，這個數列是一個柯西數列，根據 f 的連續性，該數列的收斂值所取到的 f 值就會是 y 了。 □

性質 12 一個連續函數 f 在 $[a,b]$ 上一定取的到最大值 (最小值)。

證明: 首先注意到 f 在 $[a,b]$ 上的最小上界 M 存在 (可能是 $+\infty$)，而且根據最小上界的定義，我們可以取到一個數列 a_n 滿足

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = M$$

我們考慮每次操作將區間分成一半，並選擇含有無窮多項 a_n 的區間，然後從 a_n 數列在這個區間中的數中任選一項，並把他之前的數列都忘掉，反覆進行此操作可以得到一個 a_n 的子數列 k_m，而且這個子數列是一個柯西數列，所以它有收斂值 k，而根據連續函數的定義

$$f(k) = \lim_{m\to\infty} f(k_m) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = M$$

所以連續函數在閉區間上可以取到最大值 (這同時也證明了 $M \neq +\infty$)。同理也可以取到最小值。 □

附註 上述證明中其實展示了任意一個 $[a,b]$ 區間中的數列都會有一個收斂子數列，這性質稱為數列緊緻，而在歐式空間中這等價於緊緻，也等價於閉且有界，但這都涉及到點集拓撲的的一些知識，在這裡不多加說明，但我們會得到以下的定理。

定理 6 (Bolzano－Weierstrass 定理) 給定一個無窮數列 $a_1, a_2, ...$ 且對於所有 i，$a_i \in [a,b]$。則我們可以找到一個子數列 $a_{i_1}, a_{i_2}, ...$ 會收斂。

定理 7 一個遞增 (或遞減) 的函數在 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 上除了可數多個點之外都連續。

證明: 我們可以觀察那些不連續點，並定義他「跳起來」的高度為它的右極限減左極限，注意到跳起來的高度大於 $\frac{1}{n}$ 的點只有有限個 (頂多 $\lfloor n|f(b)-f(a)| \rfloor$ 個)，所以我們就可以先數跳起來高度比 1 大的那些點，再數比 $\frac{1}{2}$ 大的那些點，依序下去就把所有不連續點數完了，所以他們可數。 □

定義 16 一個實數函數 f 是均勻連續的代表

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } 0 < |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

附註 上述的定義其實是說，f 是一個連續函數，且在連續的定義當中，給定 ε，可以找到一個 δ 滿足連續的定義，且這個 δ 對於每一點都適用。

性質 13 一個閉區間上的連續函數是均勻連續的。

證明: 令 f 是一個定義在 $[a,b]$ 上的連續函數，假設 f 不均勻連續，則存在一個 $\varepsilon > 0$，讓我們對於所有 $\frac{1}{n}$，都可以找到 x_n, y_n 滿足 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$，但是 $f(x_n) - f(y_n) > \varepsilon$，然而根據閉區間的數列緊緻性 (在性質12的證明時有提及)，我們可以找到 x_n 的一個收斂子數列 $x_{n_1}, x_{n_2}, ...$，假設他收斂到 z，則 $y_{n_1}, y_{n_2}, ...$ 也收斂到 z，但是

$$0 = f(z) - f(z) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) - \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) > \varepsilon$$

矛盾！ □

練習 2 求所有 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 滿足對於所有 $x, y \in \mathbb{R}^+$：

$$xf(x+y)(yf(x)+1) = 1$$

證明: 注意到對於任意 $a < b$，都可以找到 $0 < c < a$，在原式代入 $(x,y) = (c, a-c), (c, b-c)$，可以得到 $f(a) > f(b)$，也就是 f 是一個遞減函數，根據定理7，f 除了可數多個點之外都連續，所以至少有一個點連續，假設為 t。給定任意 $r > t$，取 $y = r - t$，則

$$\lim_{x\to t} f(x+r-t) = \lim_{x\to t} \frac{1}{x(yf(x)+1)} = \frac{1}{t(yf(t)+1)} = f(r)$$

故 f 在 r 連續，類似的給定任意 $r < t$ 我們也能得到他在 r 連續。所以我們會有

$$f(x) = \lim_{y\to 0^+} f(x+y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{x(yf(x)+1)} = \frac{1}{x}$$

代回驗證符合。 □

練習 3 求所有 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 滿足對於所有 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$：

$$a, b, c\text{可以形成三角形} \Leftrightarrow f(a), f(b), f(c)\text{可以形成三角形}$$

證明: 若 $\limsup_{x\to 0^+} f(x)$ 非零或不存在，則可以找到 $t,k>0$ 以及數列 $a_1,a_2,...$ 滿足：
1.$\lim_{n\to\infty} a_n=0$
2. 對於所有 $n\in\mathbb{N}$，$f(a_n)>k$
3.$f(t)<2k$

取 $(a,b,c)=(t,a_n,a_n)$，當 n 足夠大時可以得到矛盾！而 $\liminf_{x\to 0^+} f(x)\geq 0$ 所以 $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$。

給定 $f(a)>\varepsilon>0$，取 $(a,b,c)=(a,\delta,x)$，其中 δ 足夠小，使得 $f(\delta)<\varepsilon$，則對於所有 $x\in(a-\delta,a+\delta)$，$f(x)\in(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$，故 f 是一個連續函數。

若存在 (a,b,x_0) 滿足 $x_0\geq a+b$，且 $f(x_0)\leq|f(a)-f(b)|$，則根據中間值定理可以推得，對於任意 $x\geq a+b$，$f(x)\leq|f(a)-f(b)|$，取 $y\geq 2a+2b$，令 $w\in\{a,b\}$ 為 f 值較大的那個，原式代 (w,w,y)，則 w,w,y 不能形成三角形但 $f(w),f(w),f(y)$ 卻可以，因為 $f(y)<2f(w)$，矛盾！所以 $f(a+b)\geq f(a)+f(b)$。

考慮原式代入 $(a,b,a+b-\varepsilon)$，可以得到 $f(a+b-\varepsilon)<f(a)+f(b)$，令 $\varepsilon\to 0$，由於 f 是連續函數，故 $f(a+b)\leq f(a)+f(b)$，綜合上述得到 $f(a)+f(b)=f(a+b)$，且 $f\geq 0$，故 $f(x)=cx$，其中 c 是某個常數，代回驗證符合。 □

練習 4 (2016 APMO P5) 求所有 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 滿足對於所有 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$：

$$(z+1)f(x+y)=f(xf(z)+y)+f(yf(z)+x)$$

證明: 如果存在一個數列 $a_n>0$ 滿足：
1.$\lim_{n\to\infty} a_n=0$
2.$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\infty$

我們可以不失一般性假設這個數列每一項都小於 1(忘掉數列前幾項即可)，在原式中代入 $y=1-x,z=a_n$，可以得到

$$f(xf(a_n)+(1-x))<(a_n+1)f(1)<2f(1)$$

這也就告訴我們 $(1,f(a_n))$ 之間的 f 值都會被 $2f(1)$ 壓制住，把 n 趨近無限大就可以得到 $(1,\infty)$ 間的 f 值有上界 $2f(1)$，考慮在原式中代入 $x>1,y>1,z$ 超大，就會發現右式比 $4f(1)$ 小，但左式可以任意大，矛盾！
也就是說上述 a_n 不存在，所以 $\limsup_{x\to 0^+} f(x)$ 存在。
假設 $\limsup_{x\to 0^+} f(x)=k$，可以取到數列 $x_n>0$ 滿足：
1.$\lim_{n\to\infty} x_n=0$
2.$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=k$
在原式中代入 $x=y=\frac{x_n}{2}$ 並讓 $n\to\infty$，則我們會有

$$(z+1)k=\lim_{n\to\infty}(z+1)f(x_n)=\lim_{n\to\infty}2f(x_nf(z)+x_n)\leq 2k$$

所以 $k=0$，也就是說 $\lim_{z\to 0^+} f(z)=0$。接著證明 f 遞增：
首先我們會有 $(z+1)f(x+y)>f(xf(z)+y)$，若存在 $a>b,f(a)<f(b)$，解以下方程：

$$x+y=a,xf(z)+y=b$$

得到

$$x = \frac{a-b}{1-f(z)}$$

$$y = \frac{b-af(z)}{1-f(z)}$$

由於 $\lim_{z\to 0^+} f(z) = 0$，故我們可以取到 z 讓 $z, f(z)$ 都足夠小，讓上述方程 x, y 有正實數解，且 $z+1 < \frac{f(b)}{f(a)}$，進而得到矛盾，所以 f 遞增。
令 $z \to 0$ 並令 $g(x) = \lim_{h\to 0^+} f(x+h)$，則有

$$f(x+y) = g(x) + g(y)$$

用 $y+\varepsilon$ 代入 y 並令 $\varepsilon \to 0^+$，得到

$$g(x+y) = g(x) + g(y), g \geq 0$$

所以 $g(x) = cx$，其中 c 是某個常數，所以 $f(x) = cx$ 帶回原式得到 $c = 1$。 □

5 微分

微分是一種瞭解函數在一個點附近的變化的方法，而微分的定義其實就是割線斜率的極限。

定義 17 實數函數 $f(x)$ 在 a 可以一次微分 (可微分) 定義為：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

存在，並且我們把上述的值記做 $\frac{df}{dx}(a)$ 或是 $f'(a)$，稱為 $f(x)$ 在 a 的微分值。

性質 14 如果 f 在 a 可微，則 f 在 a 連續。

證明:

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a}(x-a) \times \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$$

故 f 在 a 連續。 □

性質 15 如果 f, g 都可微，則：
1.$(f \pm g)' = f' \pm g'$
2.$(fg)' = f'g + g'f$
3. 若 $g(a) \neq 0$，則 $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

證明: 第一條是因為：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

第二條則是：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+\lim_{x\to a}f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\end{aligned}$$

第三條留給讀者自行嘗試。 □

性質 16 如果 f 在 a 可微，g 在 $f(a)$ 可微，則 $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$

證明: 如果 f 在 a 點附近不是常數 (不存在一個包含 a 的區間讓 f 在上面是常數) 的話

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g'(f(a))f'(a)$$

如果 f 在 a 附近是常數的話，則 $g\circ f$ 在 a 附近也是常數，兩者微分皆為 0，故得證。 □

性質 17 如果 f 跟 g 互為反函數，f 在 a 可微且 $f'(a)\neq 0$ 則 g 在 $f(a)$ 可微且 $g'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}$

證明: 因為反函數的圖形對 $y=x$ 這條線是對稱的，所以不難得出上述公式。 □

性質 18 以下都是對 x 微分：

1.$(x^a)'=ax^{a-1}$

2.$(e^x)'=e^x$(其中 $e:=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$)

3.$(\log x)'=\frac{1}{x}$(其中 $\log=\log_e$)

4.$(\sin x)'=\cos x$

5.$(\cos x)'=-\sin x$

證明: 略。 □

定理 8 (微分均值定理) 如果 f 在 $[a,b]$ 可微，則存在 $c\in(a,b)$ 使得：

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

證明: 令 $k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，並令 $g(x)=f(x)-kx$，則 g 也是一個可微 (所以連續) 的函數。根據性質12我們可以在 $[a,b]$ 裡面取到 g 的最大值及最小值，由於 $g(a)=g(b)$，所以取到最大值跟最小值的點至少一者會落在 (a,b) 中，令其為 c，不失一般性假設 $g(c)$ 取到最大值，若 $g'(c)>0$，則在 c 的右邊一點點可以找到一個點使其代入 g 之值比 $g(c)$ 大 (細節讓讀者自行嘗試)，類似 $g'(c)<0$ 也不會成立，故 $g'(c)=0$，也就可以得到 $f'(c)=k$。 □

6 積分

這單元講的積分都是黎曼積分，不過實際上本單元採用的定義是達布 (Darboux) 的定義。

定義 18 定義 S 是 $[a,b]$ 的一種分割代表說 $S=\{x_0,...,x_n|a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$，而 $|S|$ 表示 $\max_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})$，也就是 S 中最大區間的大小。

定義 19 定義 $U(f,S):=\Sigma_{i=1}^{n}f_i(x_i-x_{i-1})$，其中 f_i 是 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的最小上界，類似的我們可以定義 $L(f,S)$，就是把上述的最小上界換成最大下界。進一步定義 $U(f):=\inf_S U(f,S)$，類似可以定義 $L(f):=\sup_S L(f,S)$。

定義 20 一個實數函數 f 在 $[a,b]$(黎曼) 可積定為：

$$U(f)=L(f)$$

而我們就可以定義 f 在 $[a,b]$ 上的積分值：

$$\int_a^b f(x)dx:=U(f)$$

附註 上述定義也就是當 S 把 $[a,b]$ 切的夠細的時候，f 的上和跟下和要夠接近。注意到上述定義要求 f 在 $[a,b]$ 上有界。

性質 19 若 f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f 在 $[a,b]$ 上可積。

證明: 由於 f 在閉區間上連續，所以 f 均勻連續，若給定任意 $\varepsilon>0$，我們都可以找到一個 δ 滿足均勻連續的條件，此時我們只要將區間切得比 δ 還要細，我們就可以得到一組上和與下和，他們之間的差不超過 $\varepsilon(b-a)$，而我們可以取 ε 任意的小，所以 f 就滿足可積的定義了。 □

性質 20 如果 f 在 $[a,b]$ 可積，則 f 在 $[c,d]\subseteq[a,b]$ 可積。

證明: 考慮把原本的 $[a,b]$ 切割放在 $[c,d]$ 看，如此一來可以證出 $[a,b]$ 的 $U(f)-L(f)$ 一定會比 $[c,d]$ 的大 (不論 f 是否可積)，若 f 在 $[a,b]$ 可積則可以推出 $[c,d]$ 的 $U(f)-L(f)=0$，也就是 f 在 $[c,d]$ 可積。 □

定義 21 定義 f 的不定積分 F 為

$$F(x)=\int_a^x f(u)du$$

定義 22 若 $b>a$，則 $\int_b^a f(x)dx:=-\int_a^b f(x)dx$

性質 21 若 f 在 $[a,b],[b,c]$ 上都可積，則 f 在 $[a,c]$ 上可積且

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$

證明: 每一種 $[a,c]$ 的分割我們都可以多加一刀切在 b 的，然後就可以照定義驗證了。 □

定理 9 (積分均值定理) 若 f 是一個 $[a,b]$ 上的連續函數，則存在一個 $c \in [a,b]$ 使得

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

證明: 根據定義，上式中右式的值會介在 f 在 $[a,b]$ 區間中的最小值與最大值中間，然而根據性質12，可以在區間內分別取到最大與最小值，在使用中間值定理就可以知道 c 存在了。 □

附註 實際上有更強版本 (加權版本) 的均值定理，有興趣的讀者可以自行上網搜尋。

定理 10 (微積分基本定理) 如果 f 連續，則 f 不定積分後微分還是自己。

證明:

$$\frac{\int_a^x f(x)dx - \int_a^b f(x)dx}{x-b} = \frac{\int_b^x f(x)dx}{x-b}$$

而後者根據均值定理可以得到他會等於 $[x,b]$ 區間中的某點的 f 值，然而當我們取極限 $\lim_{x\to b}$ 時，那個「某點」會趨近到 b，所以上式的值會趨近到 $f(b)$，也就得證了！ □

定理 11 (微積分基本定理) 如果 f 可微，而且微分後連續，則 f 跟 f' 的不定積分只差一個常數。

證明: 事實上我們將證明：

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

由於我們給定任意一個分割 S，考慮對 $[x_{i-1}, x_i]$ 使用微分均值定理，可以得到：

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

其中 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$，然而若我們取 $|S| \to 0$，左式不變，而右式會介在 $U(f')$ 與 $L(f')$ 中間，所以正是 $\int_a^b f'(x)dx$。 □

性質 22 (變數代換) 設 f 在 $[a,b]$ 連續，g 取值在 $[a,b]$ 且遞增 (或遞減) 可微，則：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)du$$

其中 g^{-1} 代表反函數。

證明: 考慮將兩邊 b 視為變數並對 b 微分，由性質17可以得到兩式微分相同，然而根據微積分基本定理以及 b 代 a 時左右皆為零可以得到左右式恆等。 □

附註 通常在使用時不會要求 g 遞增或遞減，但是如此一來 $g^{(-1)}$ 並不唯一，要小心選取，而實際上的則是把 g 拆成遞增段及遞減段分別使用此性質再做加總。

性質 23 (分部積分) 設 f, g 在 $[a, b]$ 可積，則：

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

證明: 考慮將性質15的 2. 積分並用微積分基本定理即可得到。 □

7 常微分方程

常微分方程是指只有一個變數並只對其微分的所組成的方程，然而本章只是粗略的介紹幾個常見的一個函數的形式，而我們所要求解的函數在範圍內都是可微的，通常要求可微的次數都是在方程式中該函數被微分的次數。

性質 24 一個微分方程形如 $\frac{du}{dx} = P(u)Q(x)$ 的話，那我們可以先把式子改寫成

$$\frac{1}{P(u)}\frac{du}{dx} = Q(x)$$

兩邊同時對 x 積分得到

$$\int \frac{1}{P(u)}\frac{du}{dx}dx = \int \frac{1}{P(u)}du = \int Q(x)dx$$

然後就可以解出 u 了，其中必須注意到上述不定積分會差一個常數。

性質 25 一個微分方程如果形如 $a_n u^{(n)} + ... + a_1 u' + a_0 u = 0$，其中 $u^{(k)}$ 代表 u 的 k 次微分，且令 $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$ 的解為 $\lambda_1, ..., \lambda_r$，其中 λ_i 有 m_i 重根，則上面那個微分方程的所有解都可以寫成

$$u(x) = \sum_{i=1}^{r} P_i(x)e^{\lambda_i x}$$

其中 P_i 是一個次數小於 m_i 的多項式。

證明: 首先注意到我們如果把「對 x 微分」當成一個把函數送到函數的函數 (實際上是一個線性變換)，並記做 D，則原式可以改寫成

$$\prod_{i=1}^{r}(D - \lambda_i)^{m_i}u = 0$$

然而根據線性代數的一些理論 (有興趣的讀者可以搜尋「特徵值」、「特徵空間」)，我們只需要解 $r = 1$ 的情形，一般情形可以用這些解生成出來 (或是說就是由各個的解各取一組加起來)。

所以我們考慮解以下方程

$$(D - \lambda)^m u = 0$$

考慮對 m 進行數學歸納法。當 $m = 1$ 時，用與性質24相同的方法：

$$u' = \lambda u$$

所以

$$\frac{u'}{u} = \lambda$$

兩邊同時對 x 積分可得

$$\log u = \lambda + c$$

也就是

$$u(x) = ce^{\lambda x}$$

對於一般的 m，假設命題對於所有比 m 小的正整數皆成立，則實際上我們要解的是

$$u'(x) - \lambda u(x) = P(x)e^{\lambda x}$$

其中 P 是一個次數小於 $m-1$ 次的多項式。令 $u(x) = R(x)e^{\lambda x}$，代入上式可以變為

$$R'(x)e^{\lambda x} + R(x)\lambda e^{\lambda x} - \lambda R(x)e^{\lambda x} = P(x)e^{\lambda x}$$

也就是 $R'(x) = P(x)$，所以 $R(x) = \int P(x)dx + c$ 是一個小於 m 次的多項式。 □

性質 26 一個微分方程如果形如 $a_n u^{(n)} + ... + a_1 u' + a_0 u = f$，且 g 是它的一組解，則所有解都可以寫成

$$u(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{r} P_i(x)e^{\lambda_i x}$$

其中 P_i 是一個次數小於 m_i 的多項式。

證明: 注意到 $u - g$ 是一組性質25的解，故本微分方程的所有解正是如此。 □

8 勒貝格單調微分定理

這個章節將要介紹勒貝格微分定理，然而這個定理是一個非常強大的定理，他的證明十分複雜，所以在這個章節中我們不會證明他，但會示範如何使用它。

定義 23 我們說 $S \subseteq \mathbb{R}$ 的測度為零代表

$$\forall \varepsilon > 0, \exists [a_i, b_i], i = 1, 2, ..., \text{ s.t. } S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i], \Sigma_{i=1}^{\infty} b_i - a_i < \varepsilon$$

附註 上述定義的意思是說，給定任意小的 ε，我們都能用總長度不超過 ε 的可數多個區間蓋住 S，所以 S 想像中不能有「長度」。
然而在標準的測度論中，可以定義出 $\mathbb{R}$ 中某些集合的測度，而一個滿足上述定義的測度為零的集合，可以證明它在測度論中是「可測」的，而且其測度正是 0。

性質 27 任意可數多個測度為零的集合聯集後依然測度為零，並可以推得任意可數多個點形成的集合測度為零。

證明: 假設 $S_1, S_2, ... \subseteq \mathbb{R}$ 皆測度為零，給定任意 $\varepsilon > 0$，由測度為零的定義可以知到，我們可以用長度總和不超過 $\frac{\varepsilon}{2^i}$ 的可數多個區間把 S_i 蓋住，考慮把這些區間都蒐集起來，則我們可以用總長度不超過 ε 的可數多個區間蓋住 $S = \cup_{i=1}^{\infty} S_i$，故得證。 □

定義 24 我們說一個性質幾乎處處成立代表說這個性質不成立的地方測度為零。

定理 12 (勒貝格單調微分定理) 如果 f 遞增 (或遞減)，則 f 幾乎處處可微。

練習 5 求所有 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 滿足對於所有 $x, y \in \mathbb{R}^+$：

$$f(x)f(y) = f(x + yf(x))$$

證明: 首先注意到若存在 $f(a) < 1$，則在原式中代入 $(x, y) = (a, \frac{a}{1-f(a)})$，得到 $f(a) = 1$，矛盾！
所以對於所有 x 都有 $f(x) \geq 1$，所以 f 遞增，然後可以把原式改寫成 (1)：

$$\frac{f(x + yf(x)) - f(x)}{yf(x)} = \frac{f(y) - 1}{y}$$

然後使用勒貝格單調微分定理可以找到一點 x_0 使得 f 在 x_0 可微，然後 x 代 x_0，$y \to 0^+$，可以得到：

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{f(y) - 1}{y}$$

存在，令此值為 c，所以就會有

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{f(x + yf(x)) - f(x)}{yf(x)} = c$$

對於任意 x 皆成立，然後如果在 (1) 中代入 $x = a, y = \frac{b-a}{f(a)}$(其中 $b > a$) 就會有

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(\frac{b-a}{f(a)}) - 1}{\frac{b-a}{f(a)}}$$

然後讓 $a \to b^-$，就會有 $\frac{b-a}{f(a)} \to 0^+$，所以

$$\lim_{a \to b^-} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = c$$

所以 f 在 $\mathbb{R}^+$ 上都可微，且

$$f'(x) = c$$

所以 $f(x) = cx + d$，剩下代回驗證即可知道哪些是解了。 □

練習 6 給定正整數 n，求所有 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 滿足對於所有 $x, y \in \mathbb{R}^+$：

$$f(x^n) - f(y^n) = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} f(x^k y^{n-1-k})$$

證明: 首先注意到原式直接保證了 f 是遞增的。接著我們要證明 f 是處處連續的。在原式中考慮 y 趨近於 x，則因為 $\sum_{k=0}^{n-1} f(x^k y^{n-1-k})$ 是有界的 (因為 f 式遞增函數)，所以右式會趨近於 0，而左式就告訴我們 f 在 x^n 這個點連續，而 x^n 可以取遍整個 $\mathbb{R}^+$，所以 f 處處連續。

接著將原式兩邊同除以 $x^n - y^n$，得到

$$\frac{f(x^n) - f(y^n)}{x^n - y^n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(x^k y^{n-1-k})}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}}$$

在上式中讓 y 趨近 x 可以得到 f 處處可微分，且

$$f'(x^n) = \frac{f(x^{n-1})}{x^{n-1}}$$

但注意到這種取值位置不同的微分方程我們根本不會解，所以要想辦法把右式換掉。考慮把原式中 y 趨近到 0，並令 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = k$(這個趨近遞減有下界，所以極限值存在)，可以得到

$$f(x^n) - k = x(f(x^{n-1}) + (n-1)k)$$

而在上式中 x 代 1 可以得到 $k = 0$，也就是

$$\frac{f(x^{n-1})}{x^{n-1}} = \frac{f(x^n)}{x^n}$$

所以就變成要解微分方程

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x}, f(0) = 0$$

所以得到 $f(x) = cx$，代回驗證符合！ □

練習 7 求所有 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 滿足對於所有 $x, y \in \mathbb{R}^+$：

$$f(x) = f(x+y) + f(x + f(y) - f(x+y))$$

證明: 首先，可以發現 f 是一個遞減函數。如果有上界 f，也就是說

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) < \infty$$

取 $y = x \to 0^+$，則 $x, x+y, x+f(y)-f(x+y)$ 都會趨近到 0，也就是說 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$，這跟 f 是一個正到正的遞減函數矛盾！

如果 f 在某點不連續，假設為 x_0，則我們可以取兩個數列 $a_1, a_2, \ldots$ 及 $b_1, b_2, \ldots$ 使得 $a_n \to x_0^-$ 且 $b_n \to x_0^+$。代入 $y = a_n, x = b_n - a_n$ 我們可以得到

$$f(b_n - a_n) = f(b_n) + f(b_n - a_n + f(a_n) - f(b_n)) \le f(x_0) + f(k)$$

其中 $k = \lim_{x\to x_0^-} f(x) - \lim_{x\to x_0^+} f(x) > 0$，讓 $n \to \infty$ 就會得到矛盾，因為 $b_n - a_n \to 0^+$。

考慮取 $x \to \infty$，我們可以使 $x, x+y, x+f(y)-f(x+y)$ 皆趨近到無窮，所以可得 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$。考慮改寫原式會有

$$\frac{f(x+f(y)-f(x+y))-f(x)}{f(y)-f(x+y)} = \frac{-f(x+y)}{f(y)-f(x+y)}$$

使用勒貝格單調微分定理，我們會有 f' 幾乎處處存在。所以對於所有 x 讓 f 在該點可微，我們都有

$$f'(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{-f(x+y)}{f(y)-f(x+y)}$$

因為 $f(y) - f(x+y) \to 0$ 當 $y \to \infty$。

我們還可以重寫上式

$$\frac{f'(x)-1}{f'(x)} = \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{f(x+y)}$$

注意到對於任意的 x，若右式存在且不為 1，則 $f'(x)$ 也存在因為我們可以將左式合成 $\frac{-1}{t-1}$ 得到 $f'(x)$。注意到若右式趨近 $+\infty$，$f'(x) = 0$ 依然存在。

然而，我們有

$$\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{f(a+y)} \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{f(b+y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{f(a+y)} \lim_{y\to\infty} \frac{f(a+y)}{f(a+b+y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{f(a+b+y)}$$

當 $\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{f(a+y)}$ 及 $\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{f(b+y)}$ 皆存在時成立。而且，最後一項要比 1 大因為 $f'(a), f'(b) \le 0$ 且 $\frac{f'(a)-1}{f'(a)}, \frac{f'(b)-1}{f'(b)} > 1$。所以對於任意的 x，要證明 $f'(x)$ 存在只需要找到 a, b 使得 $a+b=x$ 且 $f'(a)$ 及 $f'(b)$ 皆存在。

假設 f' 在 S 上存在且 $\mathbb{R}\setminus S$ 測度為零，則對於任意的 x，$(0,x)\cap S\cap(x-S)$ 是非空的，因為 $(\mathbb{R}\setminus S)\cup(\mathbb{R}\setminus(x-S))$ 是測度零的。取 $a \in (0,x)\cap S\cap(x-S)$，並令 $b = x-a$ 我們可以得到 $f'(x)$ 存在。

接著，令

$$g(x) = \log\frac{f'(x)-1}{f'(x)},$$

我們可以得到 $g : \mathbb{R}^+ \to (0,\infty]$ 滿足科西方程。注意到我們不需要也不能用 ∞ 減 ∞，但我們依然可以說 g 滿足科西方程。

然而，容易驗證 g 不能同時取值有限及無窮。所以我們可以得到 $g(x) = rx$，其中 r 是某個可能是 ∞ 的常數。所以

$$\log\frac{f'(x)-1}{f'(x)} = rx$$

解 ODE 可得

$$f(x) = x - \frac{1}{r}\log(e^{rx}-1)$$

若 $r \in (0,\infty)$。或是 $f(x) =$ 常數若 $r = \infty$，而後者並不是解，我們還可以驗證前者真的是解！ □

9 習題

練習 8 求所有 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 滿足對於所有 $x, y \in \mathbb{R}^+$：

$$f(y)f(xf(y)) = f(x+y)$$

練習 9 求所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足對於所有 $x,y\in\mathbb{R}$：

$$f(x^2+f(x)y)=f(x)^2+xf(y)$$