競賽組合導論

趙庭偉

April 27, 2018

1 前言

本篇當中將會簡單的介紹在競賽中可見的組合方法與題型，本篇章節中數學歸納法、算兩次、鴿籠原理與平均值原理、極端值原理、組合對應、塗色與賦值、圖論、生成函數、機率方法屬於解題方法，而估計與構造、組合幾何、對戰遊戲則是常見題型。希望讀者能透過本篇了解這些內容的一些粗略的想法，進一步體會到與制式的數學課本中的不同面向的數學。

2 數學歸納法

競賽中有很多題目都能使用數學歸納法處理，但是最大的問題是到底該對誰進行歸納、該怎麼對應到更小的情況，這既是困難所在，也正是這種技巧的魅力所在。

練習 1 有 110 隻貓參加超能力數學競賽，任兩隻貓會輸贏一場，而且輸贏就是輸贏，沒有平手。若任取 55 隻貓都能在牠們之中找的到一隻貓，讓這隻貓在剩下 54 隻當中輸給至多 4 隻。證明找的到一隻超強的貓，他在所有貓中總共輸給至多 4 隻貓。

證明: 我們考慮證明以下命題：

對於所有正整數 $55 \leq k \leq 110$，任取 k 隻貓都能在牠們之中找的到一隻貓，讓這隻貓在剩下 $k-1$ 隻當中輸給至多 4 隻。

而我們可以考慮對 k 使用數學歸納法，當 k 是 55 時根據題目假設成立。現在假設對於所有界在 55 到 k 的正整數都成立，我們要證明對 $k+1$ 也成立。

給定 $k+1$ 隻貓時，首先我們可以從中挑出 k 隻，當中存在一隻有點強的貓，只輸給這 k 隻中的 4 隻。若牠贏過剩下的那隻則我們就證畢了，所以可以假設牠輸給最後一隻，很自然的我們就會想考慮所有”在這 $k+1$ 隻貓中恰輸給 5 隻的貓”。

假設上述的貓稱為超強候補，那超強候補貓至多只有 11 隻，因為若超過 11 隻，則他們之間對戰的平均敗場會超過 5 場，這跟他們都是超強候補矛盾！

更進一步，根據前面論證可以得到，當我們排除一隻貓時，剩下的貓中會選出一隻超強候補，而這隻超強候補會輸給一開始排除的那隻。也就是說，每隻貓都贏過一隻超強候補。然而，這樣我們會需要至少 $\frac{k+1}{5} > 11$ 隻超強候補，矛盾！

故根據數學歸納法，上述命題成立。而原題是 $k = 110$ 時的情況，得證！ □

練習 2 令 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 為相異正整數。今天有一隻蚱蜢要沿著實數軸跳，實數軸上有 $n-1$ 個正整數點被埋了地雷，但是 $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ 上面沒有地雷。蚱蜢從 0 這個

位置開始進行向右 (正向) 進行 n 次跳躍，跳躍距離為 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 各用一次 (不必照順序使用)，證明存在某種順序讓蚱蜢不會踩到地雷。

證明: 首先，我們會很希望對 n 進行數學歸納法，而在 $n = 1, 2$ 時都容易驗證命題是對的。現在我們不妨假設命題對於所有小於 n 的正整數都成立，我們的目標是要證明對於 n 也成立。

我們還可以不妨假設 $a_1 < a_2 < ... < a_n$，以及地雷位於 $m_1 < m_2 < ... < m_{n-1}$。我們考慮若第一步跳 a_n 沒踩到地雷，或是踩到 m_1，則忘掉第一顆地雷 (m_1) 後使用歸納假設。此時可以找到一種跳法讓蚱蜢至多踩到 m_1。

若蚱蜢沒踩到 m_1 就證畢了，故我們假設蚱蜢踩到了 (此時 $m_1 > a_n$)。然而，若我們將踩到 m_1 的下一步與 a_n 互換，則由於 a_n 是最長的關係，互換後這步會跨越 m_1。然而根據假設 m_1 是最小的，故前面也不會踩到地雷，所以這個情況下證畢！

現在我們討論 a_n 上恰有一顆地雷，且這顆地雷不是 m_1。此時考慮以下集合：

$$\{a_1, a_1 + a_n\}, \{a_2, a_2 + a_n\}, ..., \{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$$

容易驗證這些集合內元素皆不相同，也不等於 a_n。所以上面的數字中至多只有 $n-2$ 個有地雷，所以至少存在一個集合是安全的，假設是 $\{a_k, a_k + a_n\}$。此時考慮第一步與第二步分別使用 a_k 及 a_n，則我們不會踩到地雷，且跨越了至少兩顆地雷 (因為 a_n 上的地雷不是第一顆)。故剩下由歸納假設，我們可以平安的送蚱蜢回家。 □

3 算兩次

在組合證明中，常常會考慮一個變量，並用兩種算法估計這個變量 (用等式或不等式)，進而得到其他變量之間的關係。

練習 3 輸贏大會有 n 個人，他們任兩個人輸贏一次並分出勝負，且任兩個人都共同贏過恰 t 個人，請證明 $n = 4t + 3$。

證明: 首先讓我們先考慮以下的問題：

問題 輸贏大會有 n 個人，他們任兩個人輸贏一次並分出勝負，且每個人都贏過恰 t 個人，請問總共有幾個人？

在這個問題中，首先可以注意到每一場都只會有一個人贏，所以把所有人贏的次數加總會等於總共比的場次，而所有人贏的次數加總正好是 tn。而有 n 個人，任兩個人都比了一場，所以總共比的場次也是 $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$。所以 $tn = \frac{n(n-1)}{2}$，也就是 $n = 2t + 1$。

回到原本的問題上，我們隨便抓一個人出來，看所有輸給他的人之間的勝負，會發現這群人中每個人都恰贏過這群人中的另外 t 人，所以根據上面問題的證明，這群人總共有 $2t + 1$ 個。所以原本的 n 個人中，每個人都恰贏過 $2t + 1$ 人，再用一次上面問題，就能得到 $n = 2(2t + 1) + 1 = 4t + 3$ 了！ □

練習 4 令 n 是一個與 6 互質的正整數。有一個正 n 邊形的頂點被塗了三種顏色，每個顏色都用了奇數次。證明存在一個以頂點組成的等腰三角形它的三個頂點都不同色。

證明: 考慮使用反證法，假設我們找不到這樣的三角形，我們計算以下這種東西的數量：$(l, \triangle)$，其中 l 是正 n 邊形的一條邊或對角線且 l 的兩端點不同色，而 $\triangle$ 則是一個以 l 為其一邊的等腰三角形。

首先注意到每條邊或對角線都恰好有三個等腰三角形以它為邊，若假設三種顏色分別用了 a, b, c 個，則所求為 $3(ab + bc + ca)$。

接著假設有 X 個三頂點同色的等腰三角形、Y 個兩同一異的等腰三角形，因為我們假設了沒有三異色的等腰三角形，所以所求就是 $2Y$。

所以得到了等式 $2Y = 3(ab + bc + ca)$。然而 $3(ab + bc + ca)$ 是一個奇數，但是 $2Y$ 是一個偶數，矛盾！也就是我們一開始假設沒有三異色的等腰三角形是錯誤的。 □

4 鴿籠原理與平均值原理

如果你有三隻鴿子卻只有兩個籠子，那就只好再買一個籠子吧。

定理 1 (鴿籠原理) 有 n 個籠子，總共有比 kn 還多隻鴿子被關在這些籠子中，則存在至少一個籠子有 $k+1$ 隻鴿子。

定理 2 (平均值原理) 給定一些數字，他們的平均是 x，則存在至少一個數字大於等於 x。

以上兩件事相當自然，但在證明一些組合問題中是相當有用的。而當中最大的問題則是在題目當中誰是鴿子誰是籠子？或是該找什麼東西的平均值呢？

練習 5 假設認識與不認識的關係是互相的，也就是說若 A 認識 B，則 B 也認識 A，試證：對於任意 n 個人，存在兩個人，他們在這 n 個人之中認識的人數相同。

證明: 首先注意到每個人可能認識的人數有 $0, 1, 2, ..., n-1$，共有 n 種可能。但此時我們還不能用鴿籠原理，因為只有 n 隻鴿子但有 n 個籠子。注意到不可能有人認識 0 個人但有另外一個人認識 $n-1$ 個人，所以這兩個籠子中總是有一個不能用，此時就可以使用鴿籠原理，得到有兩個人認識的人數相同！ □

練習 6 一個圓被 45 個點等分成 45 個弧，其中有 15 個點被塗成紅色，有 15 個點被塗成黃色，剩下 15 個點被塗成藍色。試證明可以從每色中各選出三個點，使得三個同色三角形全等。

證明: 考慮把 15 個紅色的點同時轉 $\frac{k}{45}$ 個圓周後，與黃點重疊的點有 x_k 個，其中 $k = 1, 2, ..., 44$，則因為每一對紅點與黃點會恰疊到一次，所以 $x_1 + x_2 + ... + x_{44} = 15^2 = 225$，根據平均值原理，至少存在一個 $x_i \geq \frac{225}{44} = 5.11...$，而 x_i 是個整數，所以 $x_i \geq 6$，也就

是有 6 個紅點轉一轉會跟 6 個黃點重疊，也就是這些紅點跟這些黃點全等。

考慮再把這 6 個紅色的點同時轉 $\frac{k}{45}$ 個圓周後，與藍點重疊的點有 y_k 個，其中 $k = 1, 2, ..., 44$，則因為每一對紅點與藍點會恰疊到一次，所以 $y_1 + y_2 + ... + y_{44} = 6 \times 15 = 90$，根據平均值原理，至少存在一個 $y_j \geq \frac{90}{44} = 2.04...$，而 y_j 是個整數，所以 $y_j \geq 3$，也就是有 3 個點轉一轉會跟 3 個藍點重疊，也就是這兩個三角形相似，然而我們剛剛找的 6 個黃點中對應的這 3 個點也會跟他們相似，就證完了！ □

5 極端值原理

極端值原理常常用在我們需要某個額外性質用來證明原題、進行歸納或是導出矛盾時。這時我們會考慮某個”最大”、”最小”、”最早”之類的東西，然後就可以使用這個性質進行下去。

練習 7 有個小鎮裡面有一些住戶，有些兩兩是朋友，其中朋友是互相的。有一天小鎮裡的某些人得了感冒，感冒的人的朋友中沒感冒的人會去探望他們，但是因為病毒太厲害了，探病且沒有免疫力的人隔天會感冒，而感冒的人隔天會痊癒且獲得免疫力，有免疫力的人隔天會失去免疫力，變回普通人，疫苗可以讓人獲得免疫力，請證明：
(1) 如果有人第一天打了疫苗 (獲得免疫力)，那感冒有可能永遠不會結束。
(2) 如果一開始都沒有疫苗，感冒一定會結束。

證明: (1) 我們考慮三個人互為朋友，有一個普通人、一個感冒、一個獲得免疫力，則三個人會一直循環下去，所以這個情況下感冒永遠不會結束。
(2) 首先，試過幾個例子之後可能會發現，感冒以及有免疫力的人會像防護罩一樣擴散出去，所以我們大膽猜測不會有人感冒第二次！
所以我們就會想問說，最早感冒第二次的人發生了什麼事？

我們考慮其中一個最早感冒第二次的人，把他叫 A，首先注意到 A 的朋友的第一次感冒，只有可能比他早一天、同一天或是晚一天。但傳染給 A 讓 A 感冒第二次的人，一定是 A 的朋友，而且是這個人的第一次感冒，就會發現這個人不論是上述三種中的哪一種都不可能，也就得出了不存在最早感冒第二次的人了！ □

6 組合對應

組合對應通常用在當題目要求你證明一個等式 (有時候是不等式) 的時候，給予兩邊適當的組合意義，並造出一個一對一且映成的對應 (不等式的情況只需要其中一者) 來說明兩邊的個數是一樣多的，以此來證明題目成立。

練習 8 令 $A(n)$ 表示滿足以下條件的正整數數列 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$：
$a_1 + \cdots + a_k = n$，且 $a_i + 1$ 是二的冪次 $(i = 1, 2, \cdots, k)$。
令 $B(n)$ 表示滿足以下條件的正整數數列 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m$：
$b_1 + \cdots + b_m = n$，且 $b_j \geq 2b_{j+1}$ 皆成立 $(j = 1, 2, \cdots, m-1)$。

試證明 $A(n) = B(n)$ 對於所有正整數 n 皆成立。

證明: 我們的目標是給定一組 $A(n)$ 的數列，都要找一組 $B(n)$ 的數列與他一一對應。換句話說，我們要找一個雙射函數從 A 的打到 B 的。

假設給定數列 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$，首先注意到 $2^r - 1 = 1 + 2 + ... + 2^{r-1}$，所以我們考慮把 a_i 都寫開並如下圖排列。

1 2 4 8 16

1 2 4 8 16

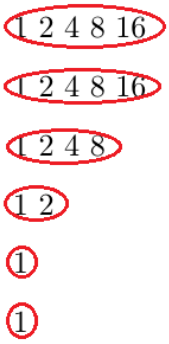
1 2 4 8

1 2

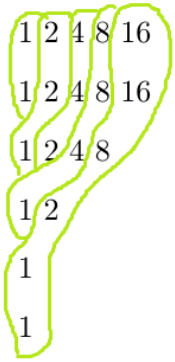
1

1

注意到此時橫向第 i 排總和恰為 a_i。



此時我們可以定義 b_i 為每次把每排最右邊數字拿走加起來，如下圖：



容易驗證這是一個滿足條件的 B 數列。要確認我們造出來的函數是一個雙射的函數，我們可以證明它存在反函數：考慮給定 b_i 時，我們把 b_1 拆成 b_1 個 1，排在每一排

開頭。再從 b_2 拆出 b_1 個 2，接在 1 後面，剩下拆成 1，並當作新的橫排的開頭。持續此操作，可以驗證這兩個演算法互為反函數。 □

練習 9 有一個停車場有 n 個停車位，從入口到出口依序編號 $1, 2, ..., n$。今天有 n 台車要停進來，每一台車的車主都很固執，他會在車窗上貼一個正整數 k，然後進入停車場後直直開到第 k 格，如果這格被停走了就前往下一格，一直重複。如果他就這麼開到最後一格都停滿了，那他就會爆氣不停後離開停車場。假設在第一台到第 n 台車的車窗上貼上 $a_1, a_2, ..., a_n$ 可以讓每一台車都和平的停完，那這個數列就是不會爆氣的。請證明有 $(n+1)^{n-1}$ 種不會爆氣的數列。

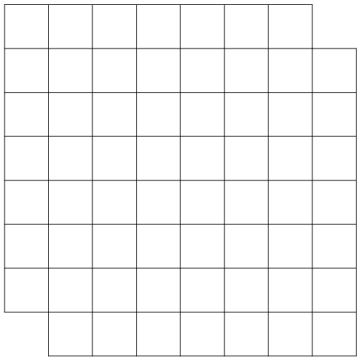
證明: 我們先讓那些人不要爆氣：在出口增設一個停車格並跟他們說如果這格不夠停你就從入口再進去一次。也就是把這 $n+1$ 格停車格圍成一圈。則這 n 台車車窗上若寫的都是 $1, 2, ..., n+1$ 中任何一個，他們就會照著規則把車都停進去，留下一隔空格。

注意到如果我們把每個人車窗上的數字同時加 1(超過 $n+1$ 就扣掉 $n+1$)，則留下的空格編號也會 $+1$。也就是說車窗上同時加 $0, 1, 2, ..., n$ 中只有一種情況會讓空下來的停車格編號是 $n+1$。而注意到在原本停車場沒人爆氣對應到的條件正好就是第 $n+1$ 沒有停車，所以一開始有 n 台車，每台車都有 $n+1$ 種編號選擇，但是 $n+1$ 種裡面只有一種事不會爆氣的，所以所求就是 $(n+1)^{n-1}$ 種。 □

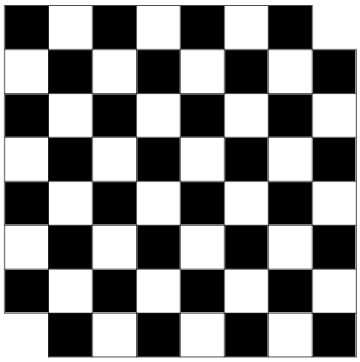
7 塗色與賦值

有時候題目的關鍵在於你要觀察某些物件之間的關係，而忘掉某一些，塗色與賦值則是幫助你標出你所關心的那些物件，這類技巧最常用於方格題上。

練習 10 8×8 的棋盤挖掉左下、右上兩格後，能不能被一些 1×2 與 2×1 的方格不相交的蓋滿？



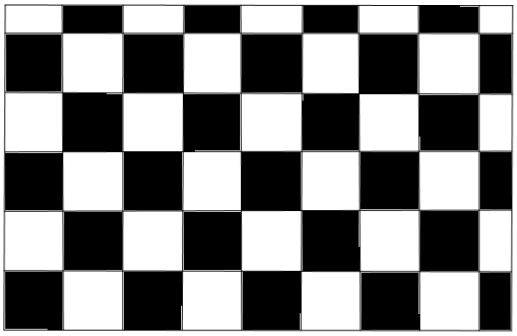
證明: 我們考慮把棋盤進行西洋棋盤塗色，如下圖：



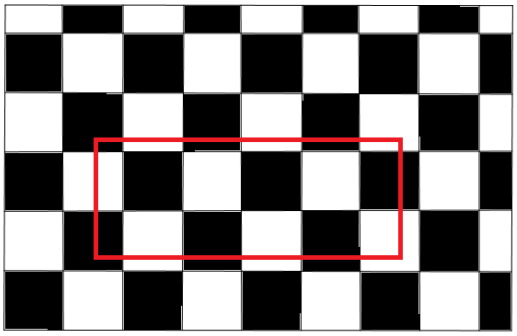
可以注意到每個 1×2 與 2×1 的方格都恰蓋到一黑一白。所以如果蓋的完，黑格數量要等於白格數量，然而上述塗色告訴我們這不可能。 □

定理 3 (De Bruijn's theorem) 一個矩形能被一些長或寬是 1 的矩形不重疊地鋪滿若且唯若這個矩形的長或寬其中一個是整數。

證明: 我們考慮將大長方形從左下角開始，水平及垂直每隔 $\frac{1}{2}$ 用一條線分割，並黑白塗色。如下圖：

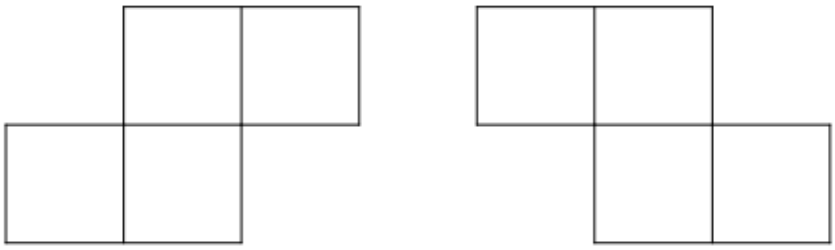


而當一個某邊長為正整數的矩形放入時，他所覆蓋的黑色與白色面積相同。

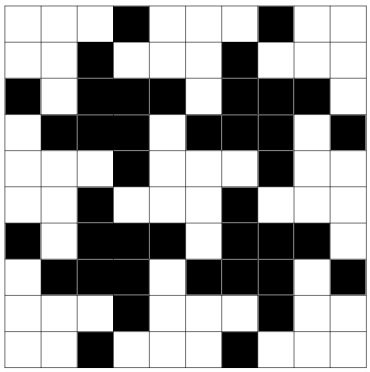


然而，大矩形的黑白面積相同的必要條件是長或寬其中一邊是整數，這部分留給讀者自行驗證。 □

練習 11 如果平面上有一個邊貼齊格線圖型是用 S 型四方塊拼成的 (可旋轉)，請證明如果改用 S 型跟 Z 型四方塊一起拼 (可旋轉) 的話，Z 型的一定要用偶數個。下圖左邊為 S 型、右邊為 Z 型四方塊。



證明: 我們考慮把平面用如下的規律塗色：



此時 S 型會蓋到偶數個黑格，Z 型會蓋到奇數個黑格。所以我們要覆蓋的範圍有偶數個黑格，因此需要偶數個 Z。 □

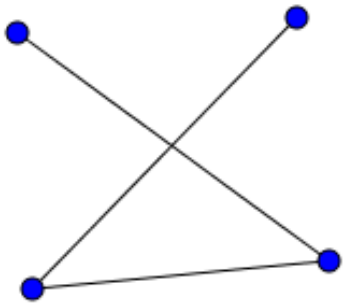
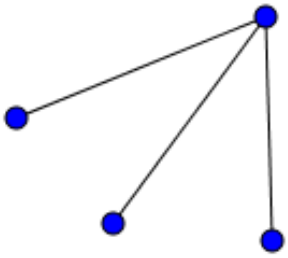
附註 本題屬於塗色法中較難的題目，圖出來的關鍵在於先設定好目標，也就是想要透過奇偶性導出矛盾。

8 圖論

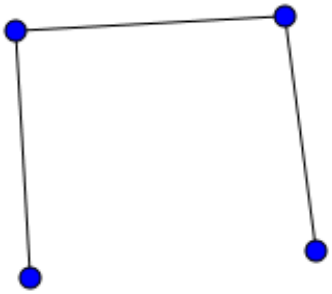
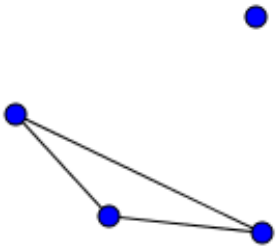
在圖論中，我們考慮的物件稱為圖，而它是由一個點集合以及邊集合所構成的，其中邊集合是用來描述兩點之間是否有關係。

練習 12 平面上有 n 個點，其中任三點不共線，在他們之間連接 m 條線段，使得任何 4 點中均有 3 點構成一個三角形，求 m 的最小值。

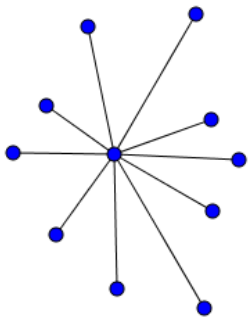
證明: 注意到原題保證我們不會有四個點的連邊關係如下面兩種情況，或是下述情況再少一些邊：

此時，我們可以考慮把整個世界的邊反白，有連邊變成沒連，沒連變成有連 (其實就是圖論中補圖的概念)，則我們不會有四個點關係如下，或是下述情況再多一些邊：

注意到連邊關係沒有這些情況，代表它不會有”圈”，也就是他是森林，而此時他至多只有 $n-1$ 條邊，所以 m 至少是 $\binom{n}{2}-n+1=\binom{n-1}{2}$。
而以下情形展示了一個滿足補圖條件且有 $n-1$ 條邊的情況 (所有點都與某個點連線)：



也就是說，他的補圖滿足題目條件且有 $\binom{n-1}{2}$ 條邊。 □

附註 一個路徑是一系列的點 $v_1, v_2, ..., v_n$，滿足 v_i 與 v_{i+1} 之間有連線 $(i = 1, 2, ..., n-1)$。而一個圈是一系列的點 $v_1, v_2, ..., v_n$，滿足 v_i 與 v_{i+1} 之間有連線 $(i = 1, 2, ..., n-1)$，且 v_n 與 v_1 有連線。

一個森林是由一堆樹組成，且樹與樹之間沒有連邊。一棵樹是一張沒有圈的簡單 (沒有自環、重邊) 連通 (任兩點之間有一條路徑) 圖。

練習 13 有一個瘋狂的科學家發現了一種神秘的粒子"imon"，一開始有些 imon，有些之間有鍵結，有些沒有，科學家可以讓這些 imon 有以下兩種行為：

(1) 讓一顆有奇數條鍵結的 imon 消失

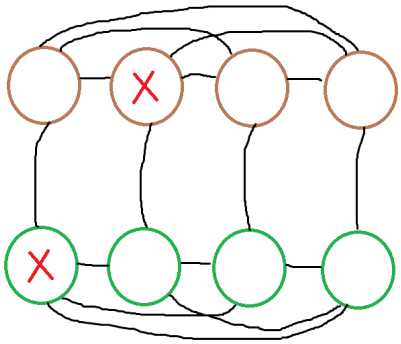
(2) 把實驗室中的所有 imon 跟鍵結複製一次，複製出來的 imon 另外還會跟原本的有鍵結

試證明：這個科學家可以經過一系列的操作後，讓這些 imon 沒有鍵結。

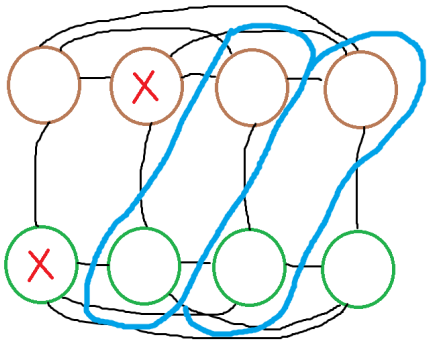
證明: 我們首先引進圖論中的 k 部圖的概念：如果我們可以把一張圖分成 k 個部分，且每個部份內任兩點不連線。

假設一開始的 imon 與鍵結形成一張 k 部圖，我們想要透過一系列操作，把他從 k 部圖變成 $k-1$ 部圖。我們考慮若存在有奇數條鍵結的 imon，那我們就讓它消失，重複此步驟直到不能操作，此時所有 imon 都有偶數條鍵結，且他還是一張 k 部圖。

接著我們把所有 imon 複製一次，則所有 imon 現在都有奇數條鍵結。此時我們從原本的 imon 中選一部，複製後的 imon 也選一部，且後者不是前者複製的結果。我們可以同時刪除這一部的所有 imon，因為他們之間倆倆沒有鍵結，因而刪除他們之中一個 imon 並不會影響到另一個的連邊。



上圖圈圈表示一部，黑線表示兩部之間可能有連線。然而，實際上如此操作後，他就是一張 $k-1$ 部圖了。因為我們可以把它如下分部：



而最又下與最左上是一部，容易驗證每一部內兩兩枚有連線。持續上述的演算法，我們可以最後把圖變成一張一部圖，也就是兩兩之間沒有連線。 □

9 生成函數

生成函數是一種用來處理數列的工具，可以把一個數列跟一個函數做對應，並透過這個函數的性質來了解原本的數列，就讓我們先來看看它的定義吧！

定義 1 數列 $a_0, a_1, \ldots$ 的生成函數定義為

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

定義 2 數列 $a_0, a_1, \ldots$ 的指數生成函數定義為

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$$

附註 前者在競賽中比較常用；然而在一般使用上並不會太過於在乎收斂性，而是將其視為廣義的冪級數在使用。而給定一個 (平滑) 函數後，哪個數列的生成函數會對應到它是唯一決定的 (有興趣的讀者可以搜尋泰勒展開式)。

練習 14 有一間學校有奇數個班級，每班有奇數個人，每班要選一個代表出來，請證明以下兩件事等價：
(1) 選出奇數個男生的方法比奇數個女生的方法多。
(2) 有奇數個班的男生比女生多。

證明: 假設有 k 個班級，第 i 個班級有 a_i 個男生、b_i 個女生。假設取出 r 個男生的方法

是 t_r，讓我們考慮 t_r 的生成函數：

$$P(x) = \sum_{r=0}^{k} t_r x^r$$

而這也可以解釋成從每個班級選擇要取男生或女生，取到男生就多一個 x，所以 $P(x)$ 會等於

$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)...(a_kx + b_k)$$

然而"選出奇數個男生的方法比奇數個女生的方法多"也就是說 x 的奇數次方係數和比偶次方係數和大，而奇數次方係數和等於 $\frac{P(1)-P(-1)}{2}$，偶數次方係數和等於 $\frac{P(1)+P(-1)}{2}$，也就是說 1. 等價於 $P(-1) < 0$，也就是

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_k - a_k) < 0$$

這也等價於有奇數個括號裡面是負的，也就是"有奇數個班的男生比女生多"。 □

練習 15 令把 n 分成一些正奇數的和的方法數為 a_n，把 n 分為一些相異正整數的和的方法數為 b_n，證明：$a_n = b_n$。

證明: 我們先試著寫出 $a_0, a_1, a_2, ...$ 這個數列的生成函數：

$$(1 + x + x^2 + x^3 + ...)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + ...)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + ...)...$$

因為我們從第一個括號中選出 x^i 代表選了 i_1 個 1，從第二個括號中選出 x^{3i_2} 代表選了 i_2 個 3，依此類推。
我們再考慮寫出 $b_0, b_1, b_2, ...$ 這個數列的生成函數：

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)...$$

因為我們第一個括號可以決定要不要選 1，第二個可以決定要不要選 2，依此類推。然而

$$(1+x+x^2+x^3+...)(1+x^3+x^6+x^9+...)(1+x^5+x^{10}+x^{15+}...)... = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}...$$

而

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)... = \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}$$

而上式分子都可以與相對應的分母消掉，分母剩下 $1 - x^{2k-1}$ 形式的東西，所以就證明完兩者相同了！ □

10 機率方法

機率方法是一個進階的組合技巧，實際上作法是賦予要證的東西一個機率模型，有時會計算某個變數的期望值，搭配平均值原理使用。

練習 16 給定一個平面上的點集 S，其中任三點不共線，對於所有以 S 的點為頂點的凸多邊形 P，令 $a(P)$ 為 P 的頂點數，$b(P)$ 為 P 外面的 S 的點的個數，請證明 $\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$ (P 取遍所有以 S 的點為頂點的凸多邊形、或是一條邊、一個點或是空集合)

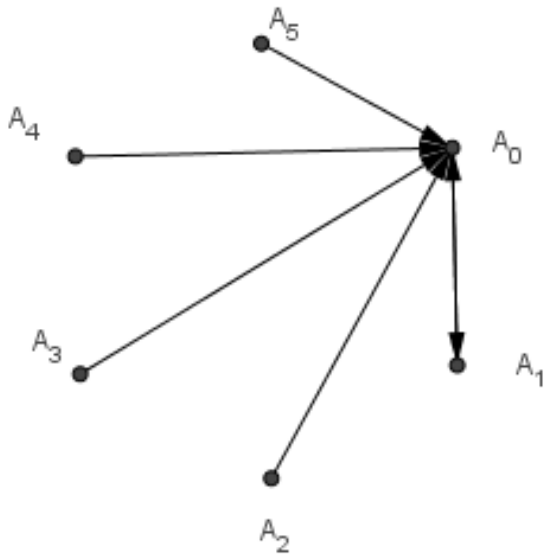
證明: 任取一個 $x \in [0,1]$，每個點有 x 的機率留下來，$1-x$ 的機率消失。注意到留下來的點的凸包 (詳見附註) 邊界是 P 的機率恰好就是 $x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}$，因為凸包邊界上的點都要留下來，而凸包外的點都要消失。而取遍所有 P 做加總後恰好就是 1，因為這就是對所有事件做加總。

所以 $\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$ 對於所有 $x \in [0,1]$ 皆成立，然而左右式都是 x 的多項式，因此這個等號對於所有 x 皆成立。 □

附註 給定平面上一個點集，若取這個集合中任兩點，這兩點的連線段都還落在這個集合中，則我們稱這個集合是凸的。而一個點集的凸包定義為最小包住這個集合的凸集。若 S 是一個任三點不共線的集合，則他的凸包邊界會是一個凸多邊形，其中頂點都是 S 中的點。

練習 17 平面上有 $2n$ 個點，其每個點上都有一台機器人，每台機器人都射一道雷射光指向另一台機器人。你每次操作可選一台機器人，叫它順時鐘旋轉，直到他的雷射光指向一台新的機器人為止，當兩台機器人 A, B 滿足 A 的雷射光指向 B、B 的指向 A，我們稱這兩台機器人「連線」。求出最小的正整數 k 使得從任意點與雷射的配置出發都能在至多 k 次操作以內讓平面上出現 n 組連線的機器人？

證明: 考慮一個正 $2n$ 邊形 $A_0A_1...A_{2n-1}$(標號順時針)，且 $A_1, A_2, ..., A_{2n-1}$ 都指向 A_0，A_0 指向 A_1。容易驗證，假設 $i < j$，且 A_i 與 A_j 互指，則 A_i 至少要轉 $j-1$ 次，A_j 至少要轉 i 次。所以要出現 n 組連線的機器人，至少需要 $0+1+...+(2n-1)-n = n(2n-2)$ 次。



注意到，$n(2n-2)=2n(n-1)$，也就是說，只要證明每個點平均轉 $n-1$ 次以內可以達到題目所求即可。而注意到每個點轉的次數可能是 $0,1,2,...,(2n-2)$，平均也剛好是 $n-1$。所以我們證明的方向應該是給出一個正確的機率模型說明這件事。

首先，假設我們從所有兩兩配對的方法中，以每種方法等機率的方式選出一種。假設對於每一種兩兩配對，我們都計算轉出它的最少所需次數，我們現在將計算這個次數的期望值。注意到，當我們固定點 A 時，另一個點 B 跟 A 配對的機率都是 $\frac{1}{2n-1}$(因為除了 A 以外有 $2n-1$ 個點)。這告訴我們 A 所需轉的次數的期望值為 $\frac{1}{2n-1}(0+1+2+...+(2n-2))=n-1$。而總次數的期望值則是每個點的次數的期望值相加，也就是 $2n(n-1)$。根據平均值原理，我們存在一種配對方法讓次數至多是 $2n(n-1)$，證畢。 □

附註 本題有一個較困難的推廣，問說平面上有 $3n$ 個點形成凸多邊形時，轉出 n 對三角形的次數。其中三角形為三個點 ABC，A 指向 B，B 指向 C，C 指向 A。

11 估計與構造

其實在前面我們已經看過了好幾題這類的題目了，這類的題目通常要求某個東西的最大值或最小值，然而這種題目通常分成兩部分，一部分證明你所猜測的數字滿足題目條件，另一部分證明這就是最大的或是最小的。然而這兩部分當中通常有一部分需要構造一個實際情況來證明 (通常是說明這個值不能在更大或更小時)，而另一部分則是比較數學的去證明說這是可行的數值。(雖然有些題目這兩部分會反過來，但壓上下界的精神是一樣的)

練習 18 有好幾個貨物，每個重量都 ≤ 1 噸，總重 n 噸，一台卡車可以裝 1 噸的貨物，請問至少要幾台卡車，才能保證把所有貨物都都載走？

證明: 我們先來考慮構造的部分，我們要造出一個情況讓卡車需求盡可能的多。

我們會發現如果每個貨物都比 $\frac{1}{2}$ 還要重一點點的話，那每個卡車都只能裝 1 個貨物。而此時我們可以有 $2n-1$ 個貨物 (例如：每個貨物都是 $\frac{n}{2n-1}$ 噸)。所以至少需要 $2n-1$ 台卡車。

而當你覺得自己的構造很有道理的時候，我們就要來嘗試估計了。首先注意到你其實只需要用一台卡車載走至少半噸的貨物後開走即可，持續這個演算法，而剩下一台卡車時，貨物也至多只剩一噸，故可載完。

實際上，只要兩個貨物的重量和不超過一噸，我們可以把貨物黏起來。持續這個動作直到無法操作為止，則此時至多只有一個貨物不到半噸 (否則就可以繼續黏)。所以當剩餘的貨物總重超過半噸時，我們總是有辦法用一台卡車載走半噸。 □

練習 19 找出所有的正整數 n，使得我們可以在 $n \times n$ 表格的每一方格中各填入字母 I、M、O 其中之一，並且符合下列條件：

- 在任一行及任一列中，有三分之一的方格填入字母 I、三分之一的方格填入 M、三分之一的方格填入 O；並且
- 對任一條對角線而言，如果它的格子數是三的倍數，則在該對角線中有三分之一的方格填入字母 I、三分之一的方格填入 M、三分之一的方格填入 O。

其中一個 $n \times n$ 表格的各行各列，可以按自然順序用 1 至 n 標號。由此，任一方格可對應到一組正整數 (i,j)，其中 $1 \leqslant i,j \leqslant n$。當 $n > 1$ 時，表格會有 $4n-2$ 條**對角線**，分成兩類：第一類對角線係由 $i+j$ 為定值的所有方格 (i,j) 所組成；而第二類是由 $i-j$ 為定值的所有方格 (i,j) 所組成。

證明: 首先，邊常一定要是 3 的倍數。接著我們試試看 3×3 到底能不能？我們不失一般性假設最上排分別是 IMO，則正中央就沒東西填了好可怕。上面的小例子可能會給我們一些啟發性，像是其實一切的問題都是 3×3 的錯。

我們考慮一般的情況，假設 $n = 3k$，則我們可以把整個表格分成 $k \times k$ 個 3×3 的小正方形，令 $I_{\text{左上}}$ 表示有幾個 3×3 的小正方形的左上角是 I，類似定義 $I_{\text{上}}I_{\text{右上}}\ldots$，注意到題目條件告訴我們

$$I_{\text{左上}} + I_{\text{上}} + I_{\text{右上}} = k$$
$$I_{\text{左}} + I_{\text{中}} + I_{\text{右}} = k$$
$$I_{\text{左下}} + I_{\text{下}} + I_{\text{右下}} = k$$
$$I_{\text{左上}} + I_{\text{中}} + I_{\text{右下}} = k$$
$$I_{\text{左下}} + I_{\text{中}} + I_{\text{右上}} = k$$
$$I_{\text{上}} + I_{\text{中}} + I_{\text{下}} = k$$

考慮把上面第二、四、五、六條相加，再扣掉第一、二、三條可以得到 $3I_{\text{中}} = k$，也就是說 n 一定要是 9 的倍數。

接著我們要來構造 $n = 9r$ 的情況：首先我們可以把表格分成 $r \times r$ 個 9×9 的小正方形，而且如果每個 9×9 的小正方形都滿足條件，則大表格也滿足。
而 9×9 的構造如下：

I	M	O	I	M	O	I	M	O
I	M	O	I	M	O	I	M	O
I	M	O	I	M	O	I	M	O
O	I	M	O	I	M	O	I	M
O	I	M	O	I	M	O	I	M
O	I	M	O	I	M	O	I	M
M	O	I	M	O	I	M	O	I
M	O	I	M	O	I	M	O	I
M	O	I	M	O	I	M	O	I

實際上，我們在 3×3 的時候可以做到只差一個方向，那我們在構造 9×9 的時候只須補足這個方向即可。 □

練習 20 令 $n \geq 2$ 是一個正整數且 λ 是一個正實數。一開始有 n 隻跳蚤在一條水平線上且不是所有跳蚤都在同一點上。我們定義一步就是選兩隻跳蚤，分別在 A 點和 B 點，且 A 在 B 左邊，讓 A 上的那隻跳蚤跳過 B 上的那隻到 C 點，其中 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \lambda$.
求所有 λ 滿足：對於每個線上的點 M 和任何一種起使的 n 隻跳蚤的站位，都存在一種移動方法讓所有跳蚤都跳到 M 的右邊。

證明: 首先我們先想想什麼時候跳蚤們可以形成" 永動機"。如果我們考慮一開始有 n 隻跳蚤位置形成等差數列，然後每次讓最後一隻跳過第一隻，那當 $\lambda = \frac{1}{n-1}$ 的時候，他們就可以維持這個陣型一直往後跳。

那對於比較一般的情況而言呢，我們可以相讓最後一隻跳過第一隻，這個操作進行 $n-1$ 次之後他們位置就會兩兩不同了。接著我們就會發現，如果 $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$ 時，相鄰兩隻跳蚤的距離的最小值 (假設為 r) 不會變大，因為最後一隻到第一隻的距離可以拆成最後一隻到倒數第二隻的距離加上倒數第二隻到倒數第三隻的距離加上...，總共有 $n-1$ 段，每一段都至少是 r。然後這個操作會讓新的最後一隻跳蚤的位置比舊的多 r，所以可以整團跳蚤前進到任意遠的地方。

那如果 $\lambda < \frac{1}{n-1}$ 呢？我們會發現跳蚤能否無限前進跟跳蚤兩兩之間的距離息息相

關。而在經過一些嘗試之後，我們可以考慮以下的量：

$$x = \sum_{i=2}^{n} (a_1 - a_i)$$

其中假設跳蚤位置是 $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$。若讓第 i 隻跳蚤跳過第一隻，則 x 會減少 $(1-\lambda(n-1))(a_1-a_i)$，因為第 i 隻超越第一隻 $\lambda(a_1-a_i)$ 的距離成為第一隻，所以會多 $n-1$ 段這個距離，但會少掉 (a_1-a_i)。注意到此時帶頭跳蚤的位置前進了 $\lambda(a_1-a_i)$。也就是說，如果我們把 x 當作動能，那跳蚤們做跳過第一隻這個操作會消耗掉 $(1-\lambda(n-1))(a_1-a_i)$ 換取 $\lambda(a_1-a_i)$ 的距離。然而當第 i 隻跳蚤跳過第 j 隻跳蚤時，帶頭跳蚤的前進量跟 x 都會比讓第 i 隻跳蚤跳過第一隻小。綜合上述，帶頭跳蚤最多至多前進 $\frac{\lambda}{1-\lambda(n-1)}x$。 □

12 組合幾何

有一類的題目會問你一些在平面或空間中做某種操作或是找某個東西，而這通常牽涉到一些幾何性質，但本質卻比較像組合，這類的題目稱為組合幾何。而在組合幾何中所使用到的幾何性質往往不會太難，但還是需要對於基本幾何有一些感覺。

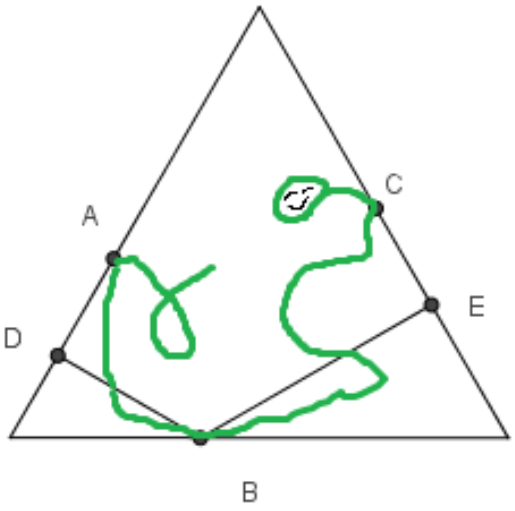
練習 21 給定一隻長度為 1 的毛毛蟲 (曲線)，證明總是可以用高為 1 的正三角形可以蓋住牠。

證明: 我們可以先找一條直線讓它與毛毛蟲相交但毛毛蟲整隻落在直線同側，因為我們可以考慮固定直線斜率，把這條線從很遠慢慢朝毛毛蟲拉，直到碰到毛毛蟲為止。接著考慮與這條線夾角 60^o 的兩個方向，分別做一樣的事情。這三條直線會夾成一個正三角形，現在我們將證明這個正三角形高不超過 1。

我們從各邊跟毛毛蟲的交點各取一個點，假設叫 A, B, C，且 B 在毛毛蟲上的位置界在 A, C 中間。假設 B 到 A 所在邊、C 所在邊的垂足分別是 D, E，則

$$\overline{BD} \leq \overline{BA}, \overline{BE} \leq \overline{BC}$$

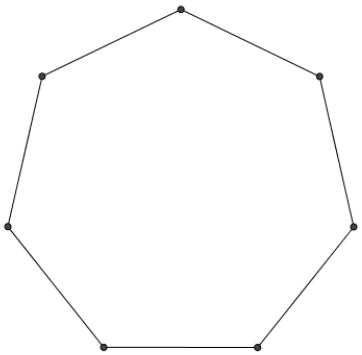
然而，正三角形性質告訴我們 $\overline{BD} + \overline{BE}$ 恰好是正三角形的高，而 $\overline{BA} + \overline{BC}$ 小於等於毛毛蟲的長度。



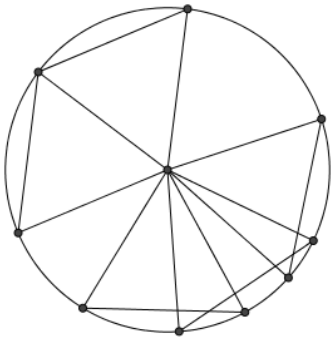
所以毛毛蟲可以被關在高度不超過 1 的正三角形，而這個正三角形又能放入高度是 1 的正三角形，得證。 □

練習 22 我們稱平面上一個有限的點集 $\mathcal{S}$ 是平衡的如果對於任兩個點 A 和 B 在 $\mathcal{S}$ 裡面都存在一個點 C 在 $\mathcal{S}$ 裡面使得 $AC = BC$。我們稱 $\mathcal{S}$ 是無中心的如果對於任何三個不同的點 A,B 和 C 在 $\mathcal{S}$ 裡面，不存在 P 在 $\mathcal{S}$ 裡面使得 $PA = PB = PC$。
(1) 證明對於所有正整數 $n \geq 3$，存在一個平衡的集合有 n 個點。
(2) 求所有正整數 $n \geq 3$ 使得存在一個平衡且無中心的集合有 n 個點。

證明: (1) 當 n 是奇數的時候，容易驗證正 n 邊形是平衡的。



而當 n 是偶數的時候，我們會發現一個正三角形三個點會互相滿足平衡條件，所以我們可以考慮以下的構造：



而每次加一個正三角形 (其中一個頂點為圓心) 時，會多兩個點。所以上述構造可以跑遍所有大於等於四的偶數。

(2) 我們會發現，n 是奇數的時候，正 n 邊形是無中心的。然而經過一些嘗試之後，我們會想證明當 n 是偶數時，都造不出無中心的 $\mathcal{S}$。

假設存在一個偶數個點的 $\mathcal{S}$ 是平衡無中心的，我們先固定一個點 $A \in \mathcal{S}$，則無中心告訴我們不存在 $B, C \in \mathcal{S}$，讓 AB 的中垂線和 AC 的中垂線同時通過 $\mathcal{S}$ 中的某點。若存在 $A, B \in \mathcal{S}$ 讓 AB 中垂線同時通過 $\mathcal{S}$ 中至少兩個點，則 A 與其它 $n-2$ 個點的中垂線應該要各自通過 S 中不同的點，但 $\mathcal{S}$ 中只剩至多 $n-3$ 個點可選，矛盾！

所以上述論證可以得到 $\mathcal{S}$ 中任兩點的中垂線恰過 $\mathcal{S}$ 中一點。而且當我們固定 A, B 後，都可以找到一個 C 讓 AC 中垂線通過 B。也就是說，當我們固定一個點之後，剩下的點應該可以兩兩配對，讓每一對的中垂線都通過這個點。但這就跟 n 是偶數矛盾！ □

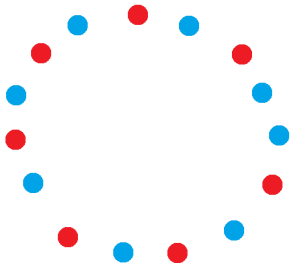
練習 23 平面上的 4027 點被稱為哥倫比亞配置如果它滿足：它有 2013 個紅點和 2014 個藍點，任三點不共線。我們可以畫一些線把平面分成好幾區，我們稱一種畫線方法對於一種哥倫比亞配置來說是好的如果它滿足:

(1) 任何一條線都不通過配置中的任何一個點

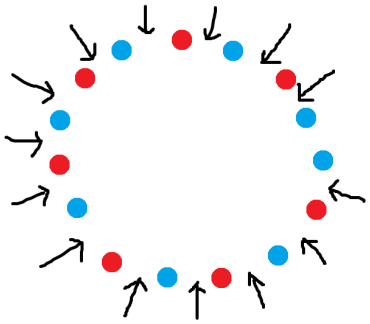
(2) 沒有一區裡面同時有兩種顏色的點

試求最小的 k 使得對於任何一種哥倫比亞配置來說，存在 k 條線是好的。

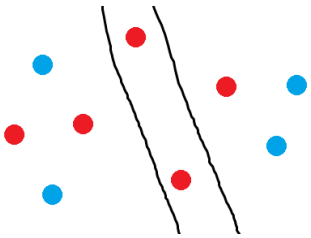
證明: 我們會想把紅點與藍點盡可能的”分開”，示意圖如下：



注意到此時每個紅藍之間的空隙都要有直線通過，而每一條直線頂多通過兩個空隙，而總共有 $2013 \times 2 = 4026$ 個空隙 (因為紅色兩邊各有一個空隙)，所以需要至少 2013 條直線。



但我們會發現我們其實可以用兩條很接近的線把兩個點跟其他人隔開，如下圖：



但因為紅色有奇數個點，如果我們一開始就能先用一條線隔開一個紅點，那我們就能用 2013 條線處理完。如果一開始不能用一條線隔開一個紅點，那代表這個點集的凸包上都是藍點，那我們一開始用一條線隔開兩個藍點，接著把藍點兩兩用兩條線隔開，這樣也只需要使用 2013 條線。所以得到答案就是 2013。 □

13 對戰遊戲

這類題目會有一群人 (通常是兩個，我幾乎還沒看過實際上是三個以上在玩的) 玩一場遊戲，然後題目會是請你求出哪個人有必勝策略之類的問題。

練習 24 有一個 $m \times n$ 的巧克力，兩個人輪流吃巧克力，每次都要選取某一格，並把這格以及它右上角的所有巧克力吃完，但是最左下角的巧克力有毒，吃了會死掉，死掉就輸了，請問誰有必勝策略？

證明: 首先我們會先發現一個驚人的事實：

在一場沒有隱藏資訊、沒有運氣成分、有限回合內會結束且不會平手的兩人遊戲中

一定有一個人有必勝策略!!!

這個的證明其實相當的直觀，考慮每個狀態，假設這個狀態 A 再過至多 k 回合 (某一個人操作一次就稱為一回合) 後遊戲就會結束，那對這個 k 使用數學歸納法我們可以

假設再過至多少於 $k-1$ 回合後遊戲就會結束的狀態們都有人有必勝策略，那 A 勢必也會轉變成這些狀態中的某一個。我們稱一個狀態是先手必勝若在這個狀態下先操作的人會贏；稱一個狀態是後手必勝若在這個狀態下後操作的人會贏假設 A 能走到某個後手必勝的狀態 B，那 A 則是先手必勝 (因為 A 的先手就是 B 的後手)。假設所有 A 能走到的所有狀態都是先手必勝，那 A 則是後手必勝。所以我們可以歸納的往上得出每個狀態的勝敗，也證明了上面的事實。

那在這題中呢，首先我們先不考慮最右上角那格，假設先手有某一格可以選，使得選了之後是他會贏的局面，那他就贏了。假設每一個選了之後都是他會輸的局面，那先手就選取最右上角那一格，此時後手不論選哪一格都會輸，因為她選了那格之後的局面與先手直接選該格相同，而根據假設我們假設選了這格會輸。所以無論如何先手都有必勝策略，除了 $(n,m)=(1,1)$ 之外，因為這個情況下我們剛說選右上角這件事會讓先手死掉，而且先手也只能選這格，所以這個情況下先手會輸。 □

附註 我們這題只證明了有必勝策略這件事，但我們沒有實際上找出來。所以如果你找我玩這遊戲，我也不一定會贏。但這種題目極為稀有，在競賽題目中通常你需要找出必勝策略才有辦法證明誰會贏。

練習 25 給定正整數 $a_1,a_2,...,a_k$，桌上一開始有一些石頭。兩人輪流拿石頭，每次都可以取走 $a_1,a_2,...,a_{k-1}$ 或 a_k 顆石頭，不能再取的人就輸了。假設兩人都絕頂聰明，請證明存在正整數 M,N，使得對於所有 $n\geq N$，桌上一開始有 n 顆石頭的遊戲的勝負結果跟桌上一開始有 $n+M$ 顆石頭的遊戲一樣。

證明: 跟上一題討論一樣，我們知道 n 的勝負取決於 $n-a_1,n-a_2,...,n-a_k$ 的勝負。令 $f(n)=1$ 若 n 是先手勝，否則為 0，則 f 可以想成一個遞迴。不失一般性假設 $a_1,a_2,...,a_k$ 中最大的是 a_1，若我們可以找到兩個長度是 a_1 的區間 $[x,x+a_1],[y,y+a_1]$(其中 $x<y$) 內 f 長一樣，則 $f(x+a_1+1)$ 只取決於 $[x,x+a_1]$ 內的數，而這個會等於他們在 $[y,y+a_1]$ 中對應位置的數，所以 $f(x+a_1+1)=f(y+a_1+1)$。重複此證明可以得到在 $n\geq x$ 時 f 以 $y-x$ 為週期。 □

練習 26 在一張桌子上，有 2009 張牌由左至右排成一排，一開始朝上的那面是黃金戰神卡，朝下的是暗黑戰神卡，有兩個人輪流按照以下規則翻牌：選取連續 50 張牌，最左邊的要是黃金戰神卡，將他們通通翻面。無法操作的人就輸了。請問：
(1) 遊戲是否一定會結束？
(2) 誰有必勝策略？

證明: (1) 本題可以考慮使用數學歸納法證明，不過也可以使用前面提過的賦值法。從右數來第 i 張賦值 2^i，並考慮所有黃金戰神卡上的數字和，假設為 x，則 x 是一個非負整數。

假設我們在某一步翻了從右數來第 i 張到第 $i+49$ 張，則因為第 $i+49$ 張是黃金戰

神卡，x 會減少至少 $2^{i+49}-(2^{i+48}+2^{i+47}+...+2^i)=2^i\geq 1$，而我們熟知若要維持它是非負整數，則只能減 1 有限多次，所以遊戲有限次內會結束。

(2) 我們考慮把第 $10, 60, 110, ..., 1960$ 張稱為紅寶石戰神卡。如果遊戲結束了，那所有紅寶石戰神卡都是暗黑戰神卡朝上。然而，每翻一次洽會讓一張紅寶石戰神卡翻面，所以要讓紅寶石戰神卡都是暗黑戰神卡朝上的話，需要操作偶數次。因此只有後手有機會在操作後讓對方再也無法操作，而遊戲必定會結束，故後手有必勝策略。 □